国家杰出青年科学基金
和国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金资助

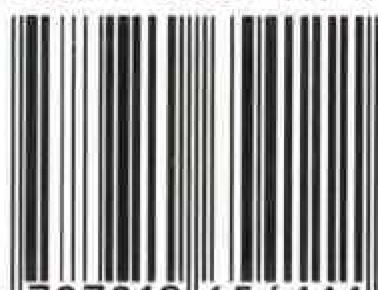
排队论
——基础与应用

唐应辉　唐小我　著



电子科技大学出版社

责任编辑　徐守铭
版式设计　徐守铭
封面设计　杜　倩

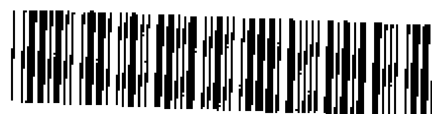


ISBN 7－81065－411－X/F · 13
定价: 18.00元

国家杰出青年科学基金
和国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金资助

排队论
——基础与应用

唐应辉　唐小我　著



电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

排队论:基础与应用/唐应辉,唐小我著. --成都:
电子科技大学出版社,2000.5

ISBN 7-81065-411-X

Ⅰ.排… Ⅱ.①唐…②唐… Ⅲ.排队论

Ⅳ.O226

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 22599 号

排队论
——基础与应用

唐应辉　唐小我　著

出　　版:电子科技大学出版社
(成都建设北路二段四号,邮编:610054)
责任编辑:徐守铭
发　　行:新华书店经销
印　　刷:西南冶金地质印刷厂
开　　本:850×1168　1/32　印张 11.3125　字数 313 千字
版　　次:2000 年 5 月第一版
印　　次:2000 年 5 月第一次
书　　号:ISBN 7-81065-411-X/F·13
印　　数:1--1500 册
定　　价:18.00 元(平装)　22.80 元(精装)

内 容 提 要

全书内容共分十章，较系统地介绍了排队系统的基础理论，重点阐述了几种典型排队系统的瞬态和稳态性质，以及其基本的分析方法。第二章和第三章介绍了无限源和有限源的简单排队系统，第四章在传统分析的基础上，阐述了分析 $M/G/1$ 型排队系统瞬态性质的又一种新思路，而第九章和第十章较详细地分别介绍了经典排队系统理论延伸的两个方面——休假排队系统与可修排队系统，并在附录中对著名的 Little 公式，以及 p_j^-、p_j、p_j^+ 三者的关系作了阐述，同时注意到管理科学、计算机科学、通信等工程科学专业实际，概括地介绍了排队系统理论的应用方面和实例。

本书是作者多年来科研成果的总结，是一本科技专著，对科技工作者和工程技术人员有较大的参考价值，同时也可作为有关专业硕士、博士研究生相应课程的教材和教师的教学参考书。

作者简介

唐应辉，男，1963年3月出生，1988年1月硕士毕业于西安电子科技大学运筹学专业，1998年5月破格晋升为电子科技大学教授，现任电子科技大学应用数学系工程数学教研室主任，学校数学学科职称评议组成员，电子科技大学《运筹与控制》硕士点的学科带头人，四川省工业与应用数学学会理事，全国大学生数学建模竞赛四川省赛区组委会副秘书长．

感兴趣的研究领域是排队论及其应用，系统可靠性分析，应用概率模型及应用，决策理论和系统工程领域中的运筹学问题．作为独著或第一作者，近十年已在国内外重要学术刊物上发表学术论文近50篇，如《J. of Applied Probability》，《Microelectronics & Reliability》，《Acta Mathematic Scientia》，《J. of Systems Science & Systems Engineering》，《Chinese J. of Electronics》，《系统工程理论与实践》，《电子学报》，《系统科学与数学》，《高校应用数学学报》，《控制与决策》等，其中独立地在国外有影响刊物上发表6篇，在国内一级刊物上发表近20篇．在公开发表的学术论文中，被国内外有影响检索刊物《SCI》，《EI》，《EEA》，《CCA》，《MR》和《中国数学文摘》等共检索43篇，其中被国际权威检索刊物《SCI》，《EI》检索13篇次．国家自然科学基金资助项目《可修系统的评价分析和决策的理论方法研究》1997年获电子工业部科技进步（理论成果）三等奖（排名第一）．

唐小我，男，1955 年 3 月出生于四川省彭州市. 师从曹长修教授，1994 年博士毕业于重庆大学自动控制理论与应用专业. 1988 年至 1989 年在英国 Management School of University of Lancaster 作访问学者. 1990 年 1 月破格晋升为副教授，1993 年 5 月破格晋升为教授. 现为电子科技大学管理学院院长，教授，重庆大学技术经济与管理专业和西南交通大学管理科学与工程专业博士生指导教师，四川省首批学术与技术带头人，中国系统工程学会常务理事，中国数量经济学会理事，四川省知识经济促进会理事长，四川省数量经济学会副理事长.

10 多年来，主要从事管理科学与工程领域的研究工作. 作为项目负责人和第一主研，主持并完成 10 余项国家级和省部级科研项目，其中包括，国家杰出青年科学基金项目，国家教委"跨世纪优秀人才培养计划"基金项目，国家自然科学基金项目，国家自然科学基金青年基金项目，国家教委资助优秀年轻教师基金项目，国家教委博士点基金项目和电子工业部软科学项目等.

在经济预测与决策，投入产出分析，投资系统分析，数量经济分析，运筹与管理和科技管理等方面出版著作 5 本，发表学术论文 100 余篇，获得 11 项国家级和省部级奖励，其中包括国家科技进步三等奖 1 项，四川省科技进步一等奖 1 项，电子工业部科技进步一等奖 1 项，国家统计局全国统计科技进步二等奖 2 项.

获得 10 余项国家级和省部级荣誉称号. 1999 年获国家有突出贡献中青年专家称号和国家人事部专业技术人才一等功奖励，同年还获得全国五一劳动奖章. 1998 年获中国青年科学家奖. 1996 年获电子工业部有突出贡献中青年专家称号. 1992 年被评为电子工业部优秀科技青年，同年被评为政府特殊津贴专家.

序

排队论(Queueing Theory)又名**随机服务系统理论**,是研究拥挤现象的一门学科,它通过研究各种服务系统在排队等待中的概率特性,来解决系统的最优设计和最优控制。排队论是运筹学的重要分支,也是应用概率的分支,所研究的问题有很强的实际背景,它起源于 20 世纪初丹麦电信工程师 A. K. Erlang 对电信系统的研究。之后,经过国内外的数学家和运筹学家的近 90 年的努力,排队论已是一门成熟的理论,其文献数以千计,特别是随着计算机技术的迅猛发展,排队论的发展更是日新月异,其应用领域也不断扩大。目前,排队论已广泛用于电信、交通运输、生产与库存管理、计算机系统设计、计算机通信网络、军事作战、柔性制造系统和系统可靠性等众多领域,取得了丰硕成果,并已成为工程技术人员、管理人员在系统分析与设计中的重要数学工具之一。

本书内容分为十章,较系统地介绍了排队系统的基础理论,同时注意到管理科学、计算机科学、通信等工程科学专业实际,概括地介绍了排队系统理论的一些应用方面,并较详细地分析了计算机设计中的实时处理和管理科学中的存储问题。休假排队系统与可修排队系统是两类更广泛、更复杂的排队系统,是经典排队系统理论研究的延伸和拓广,而且又提出了许多新的研究课题,因此,近几十年来一直是比较活跃的研究方面,成果也层出不穷。为此,作者写出第九章和第十章,分别介绍这两方面的研究内容,以飨读者。书中部分内容主要参考了国内外较有代表性的文献和著作,也有相当内容是作者多年来的研究工作和教授这门课程的经验总结。如泊松流充分必要条件的简洁证明,$M/G/1/\infty$ 排队系统队长瞬态分布的直接讨论方法和稳态分布的递推公式,以及该系统输出过程的嵌入更新过程分析法和离去顾客平均数的渐近展开等,特别是关于休假排队系统与

可修排队系统的有关内容，更是作者多年辛劳的结晶。另外，书末增加了一个附录，介绍内容涉及到的、引用到的，但又不适合写进正文中的有关知识，特别是对著名的 Little 公式的阐述，以及对 p_j^-、p_j 与 p_j^+ 三者关系的说明，相信读者阅后对涉及到的有关问题会有更深刻的认识，因此，本书内容具有一定的广度和深度。

在本书的写作过程中，作者力求做到内容层次分明，结构严谨，概念准确，表述清楚。理论分析由浅入深，论证严格，即使对引用到的而又没有给出证明的结果，作者也尽力指明出处。

但是，由于作者水平有限，错误在所难免，恳请广大读者指正，以求改进。

最后，作者感谢国家杰出青年科学基金（编号 79725002）和国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金（教技厅[1997]2 号）的资助，也感谢多年来关心和支持作者工作的领导、同事和朋友。

作　者

2000 年 3 月于电子科技大学

常用符号说明

T_n：　第 n 个顾客的到达时刻

τ_n：　第 n 个到达与第 $n-1$ 个到达之间的间隔时间

$F(t)$：　到达间隔时间的分布函数

λ：　单位时间内的平均到达率

χ_n：　第 n 个顾客所需的服务时间

$G(t)$：　服务时间的分布函数

μ：　单位时间内的平均服务率(忙的条件下)

ρ：　系统的交通强度

$N(t)$：　时刻 t 的队长(顾客数)

$N_q(t)$：时刻 t 的等待队长

N：　平衡时任意时刻的队长

$\overline{N}$：　平衡时的平均队长

N^-：　平衡时到达的顾客看到的队长

N^+：　平衡时服务完毕离开系统时留在系统中的队长

N_q：　平衡时任意时刻的等待队长

$\overline{N_q}$：　平衡时任意时刻的平均等待队长

$p_j(t)$：　时刻 t 队长为 j 的概率

p_j：　平衡时任意时刻队长为 j 的概率

p_j^-：　平衡时到达顾客看到队长为 j 的概率

p_j^+：　平衡时服务完毕离开系统时留在系统中队长为 j 的概率

$W(t)$：　平衡时顾客的逗留时间分布函数

W：　平衡时顾客的逗留时间

$\overline{W}$：　顾客的平均逗留时间

$W_q(t)$：平衡时顾客的等待时间分布函数

W_q：　平衡时顾客的等待时间

$\overline{W_q}$：　顾客的平均等待时间

b：　忙期长度

$B(t)$：　忙期长度的分布函数

$\hat{\tau}$：　系统的闲期长度

T_n^+：　第 n 个服务完毕的顾客的离去时刻

$M(t)$：　$(0,t]$内离去顾客的平均数

V：　在休假排队系统中服务员的休假时间长度

$V(t)$：　休假时间长度的分布函数

$\bar{V}(t)$：　$1-V(t)$

X：　在可修排队系统中服务台的寿命长度

$X(t)$：　寿命长度的分布函数

Y：　服务台故障后的修理时间长度

$Y(t)$：　修理时间长度的分布函数

β：　平均修理时间长度

L：　拉普拉斯(Laplace)变换

LS：　拉普拉斯－司梯阶(Laplace－Stieltjes)变换

$g(s)$：　相应大写 $G(t)$ 的 LS 变换

$g^*(s)$：相应大写 $G(t)$ 的 L 变换

$F^{(k)}(t)$：分布函数 $F(t)$ 自身的 k 重卷积，$k\geqslant 1$，$F^{(0)}(t)=1$

$E[X]$：某个随机变量 X 的期望值

$E[X^k]$：某个随机变量 X 的 k 阶原点矩

$D[X]$：某个随机变量 X 的方差

$P^-(z)$：分布律$\{p_j^-\}$的母函数

$P(z)$：　分布律$\{p_j\}$的母函数

$P^+(z)$：分布律$\{p_j^+\}$的母函数

$P_v(z)$：在休假排队系统中队长平稳分布的母函数

$\tilde{P}(z)$：　在可修排队系统中队长平稳分布的母函数

$\mathscr{R}(s)$：　复变量 s 的实部

$\binom{n}{k}$：　n 中取 k 的组合数，$k\leqslant n$，且规定$\binom{n}{0}=1$，$\binom{n}{k}=0$　$(k>n)$

另外，其它有关符号见出处的说明．

目　　录

第一章　引　　论

§1　排队系统概述

1. 排队例子及基本概念

排队是日常生活和工作中常见的现象，例如：上下班坐公共汽车，等待公共汽车的排队；顾客到商店购物形成的排队；病人到医院看病形成的排队；往售票处购票形成的排队等；另一种排队是物的排队，例如文件等待打印或发送；路口红灯下面的汽车、自行车通过十字路口．排队现象是由两个方面构成，一方要求得到服务，另一方设法给予服务．我们把要求得到服务的人或物（设备）统称为**顾客**，给予服务的服务人员或服务机构统称为**服务员**或**服务台**（有时服务员专指人，而服务台是指给予服务的设备）．顾客与服务台就构成一个**排队系统**，或称为**随机服务系统**，显然，缺少顾客或服务台任何一方都不会形成排队系统．

排队现象有的是以有形的形式出现，例如上下班坐公共汽车等，这种排队我们称为**有形排队**，而有的是以无形的形式出现，例如有许多顾客同时打电话到订购处订购车票，当其中一个顾客正在通话时，其它顾客就不得不在各自的电话机旁等待，他们可能分散在各个地方，但却形成一个无形的队列等待通话，这种排队现象称为**无形排队**．

2. 基本的排队系统

1）单服务员的排队系统，其图解表示如下（见图 1.1）：

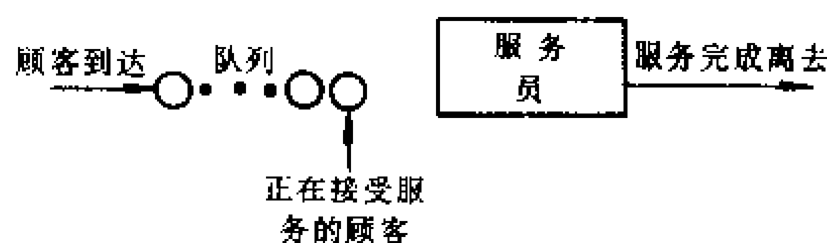


图 1.1

2)多服务员(台)的排队系统,其图解表示如图 1.2 和 1.3 所示。

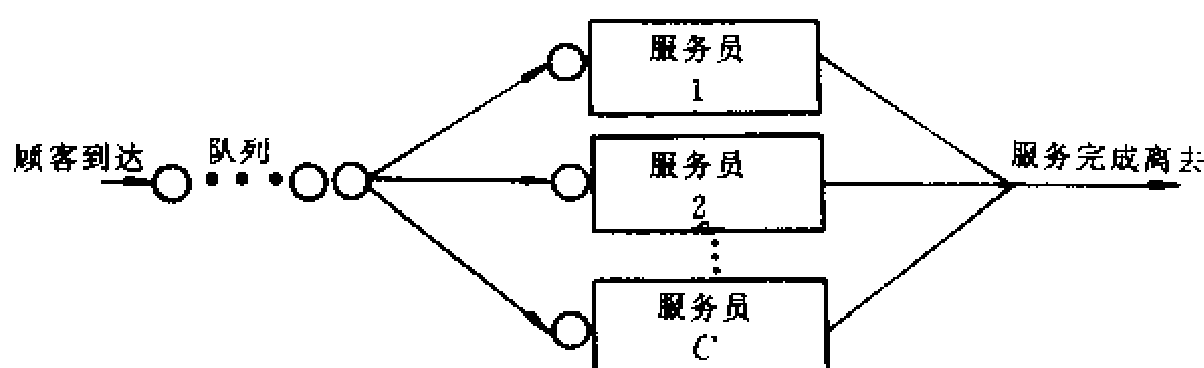


图 1.2 排成一个队列

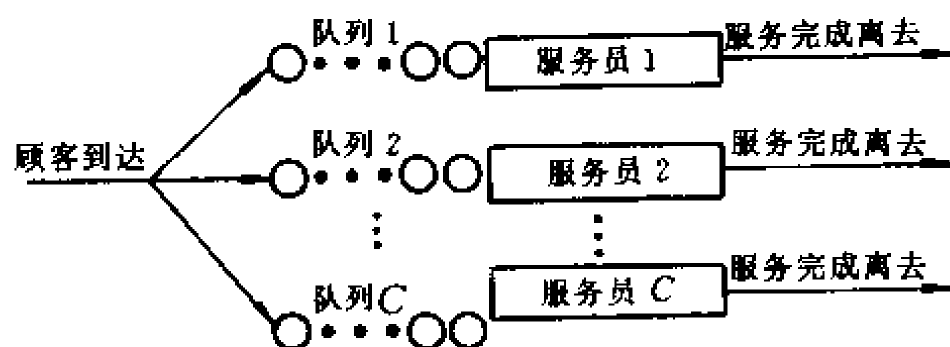


图 1.3 排成多个队列

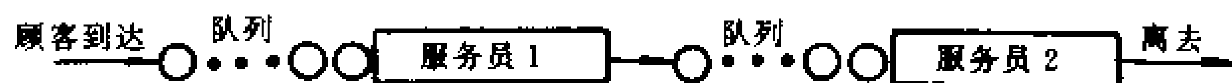


图 1.4 串联

以及串并混合、网络等排队系统.

3. 排队论研究的内容和目的

在各种排队系统中，随机性是它们的一个共同特性，而且起着根本性的作用. 顾客的到达间隔时间与顾客所需的服务时间中，至少有一个具有随机性，否则问题就太简单了. 排队论主要研究描述系统的一些主要指标的概率特性，分为三大部分：

1）排队系统的性态问题

研究排队系统的性态问题就是研究各种排队系统的概率规律，主要包括系统的队长（系统中的顾客数）、顾客的等待时间和逗留时间，以及忙期等的概率分布，包括它们的瞬时性质和统计平衡下的性态. 排队系统的性态问题是排队论研究的核心，是排队系统的统计推断和最优化问题的基础. 从应用方面考虑，统计平衡下的各个指标的概率性质尤其重要.

2）排队系统的统计推断

为了了解和掌握一个正在运行的排队系统的规律，就需要通过多次观测、搜集数据，然后用数理统计的方法对得到的数据进行加工处理，推断所观测的排队系统的概率规律，从而应用相应的理论成果来研究和解决该排队系统的有关问题. 排队系统的统计推断是已有理论成果应用实际系统的基础性工作，结合排队系统的特点，发展这类特殊随机过程的统计推断方法是非常必要的.

3）排队系统的最优化问题

排队系统的最优化包括系统的最优设计（静态最优）和已有系统的最优运行控制（动态最优），前者是在服务系统设置之前，对未来运行的情况有所估计，使设计人员有所依据，例如电话局的规模、水库容量的大小、机场跑道数目的设计等；后者是对已有的排队系统寻求最优运行策略，例如库房领取工具，当排队领取工具的工人太多，就增设服务员，这样虽然增加了服务费用，但另一方面却减少了工人领取工具的等待时间，即增加了工人有效的生产时间，这样带来的好处可能远超过服务费用的增加. 因此，对于一个排队系统的设计或运行管理，就需要考虑顾客与服务双方的利益，以便在某种合理的指标上

使系统达到最优化. 对大多数实际系统讲，若把输入看作是由客观条件决定的，不受控制(有时也可采取控制输入的手段)，则解决这种问题的关键是确定服务率或服务台数或选取顾客的服务规则或这几种量的组合，使之在某种意义下系统达到最优. 优化的指标函数可以是时间，也可以是费用或收入. 学习和应用排队论知识就是要解决客观系统的最优设计或运行管理，创造更好的经济效益和社会效益.

4. 排队系统的基本组成部分

尽管排队系统是各种各样的，但从决定排队系统进程的主要因素看，它主要由三部分组成：**输入过程**、**排队规则**和**服务机构**. 下面分别加以说明.

1)输入过程

输入过程是描述顾客来源及顾客是按怎样的规律抵达排队系统. a)**顾客总体数**：顾客的来源可能是有限的，也可能是无限的，例如工厂内发生故障待修的机器是有限的；到达窗口购票的顾客总体可以看成是无限的(因为不存在最大的限制数). b)**到达的类型**：顾客是单个到达，或是成批到达，例如工厂内发生故障待修的机器是单个到达；在库存问题中，进货看成顾客到达，就是成批到达的例子. c)**相继顾客到达的间隔时间服从什么样的概率分布，分布的参数是什么，到达的间隔时间之间是否独立**. 如果设 $T_0=0, T_n(n\geq 1)$ 表示第 n 个(批)顾客的到达时刻，则

$$T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < T_{n+1} < \cdots$$

又令 $\tau_n = T_n - T_{n-1}, n\geq 1$，则 τ_n 表示第 n 个(批)顾客到达时刻与第 $n-1$ 个(批)顾客到达时刻之差，称序列$\{\tau_n, n\geq 1\}$为顾客相继到达的**间隔时间序列**. 在排队论研究中，一般假定$\{\tau_n, n\geq 1\}$相互独立、同分布. 有定长输入，即顾客是等距时间到达；最简单流输入 (Poisson 流输入)，即$\{\tau_n, n\geq 1\}$独立、同负指数分布；k 阶爱尔朗输入；超指数分布输入；几何分布输入；一般独立输入；成批输入(每次到达是一批顾客，每批的个数可以是固定的，也可以是随机的)，以及其它形式的输入等.

2)排队规则

排队规则是指服务允许不允许排队,顾客是否愿意排队.在排队等待的情形下服务的顺序是什么,分为:*a*)**损失制**:顾客到达时,若所有服务台均被占,服务机构又不允许顾客等待,此时该顾客就自动离去,例如通常使用的损失制电话系统.*b*)**等待制**:顾客到达时,若所有服务台均被占,他们就排队等待服务.在等待制系统中,服务顺序又分为:**先到先服务**,即顾客按到达的先后顺序接受服务;**后到先服务**,例如情报系统、天气预报资料总是后到的信息越重要,要先处理;**随机服务**,即在等待的顾客中随机地挑选一个顾客进行服务,例如电话员接线就是用这种方式工作;**有优先权的服务**,即在排队等待的顾客中,某些类型的顾客具有特殊性,在服务顺序上要给予特别待遇,让他们先得到服务,例如病危人先治疗;带小孩的顾客先进站等.优先权又分**强拆型优先权**和**非强拆型优先权**.强拆型优先权是指这类顾客到达时,无论正在接受服务的顾客是否服务完毕,都必须立即中止服务而转为接受这类顾客并给予服务,例如医院对病危人的服务.非强拆型优先权是指这类顾客到达时,必须等待正在接受服务的顾客服务完毕后才会得到服务.在多个服务台的情形,顾客到达是排成一个队列,或是排成多个队列,例如在并联服务台的排队系统中.而对于循环排队,如纺纱工管理 m 台机器,总是在各机器之间按固定路线巡回,遇到哪台机器故障就处理哪台.*c*)**混合制**:损失制与等待制的混合,分为队长(容量)有限的混合制系统,等待时间有限的混合制系统(等待时间≤固定的时间 t_0,否则就离去),以及逗留时间有限制的混合制系统.

3)服务机构

刻划服务机构的主要方面为:*a*)**服务台的数目**.在多个服务台的情形下,是串联或是并联;*b*)**顾客所需的服务时间服从什么样的概率分布,每个顾客所需的服务时间是否相互独立,是成批服务或是单个服务等**.常见顾客的服务时间分布有:定长分布、负指数分布、超指数分布、k 阶爱尔朗分布、几何分布、一般分布等.

由于输入过程、排队规则和服务机构的复杂多样性,形成了各种

各样的排队模型，因此在研究一个排队系统之前，首先要弄清这三部分的具体内容和结构.

5．经典排队系统的符号表示

一个排队系统是由许多条件决定的，为了简明起见，在经典排队系统中，常采用3～5个英文字母表示一个排队系统，字母之间用斜线隔开：第一个字母表示输入分布类型，第二个字母表示服务时间的分布类型，第三个字母表示服务台的数目，第四个字母表示系统的容量，有时用第五个字母表示顾客源中的顾客数目. 例如：

$M/M/c/\infty$表示输入过程是 Poisson 流，服务时间服从负指数分布，系统有 c 个服务台平行服务($0<c\leqslant\infty$)，系统容量为无穷，于是 $M/M/c/\infty$系统是等待制系统；

$M/G/1/\infty$表示输入过程是 Poisson 流，顾客所需的服务时间为独立、服从一般概率分布，系统中只有一个服务台，容量为无穷的等待制系统；

$GI/M/1/\infty$表示输入过程为顾客独立到达且相继到达的间隔时间服从一般概率分布，服务时间是相互独立、服从负指数分布，系统中只有一个服务台，容量为无穷的等待制系统；

$E_k/G/1/K$ 表示相继到达的间隔时间独立、服从 k 阶爱尔朗分布，服务时间为独立、服从一般概率分布，系统中只有一个服务台，容量为 $K(1\leqslant K<\infty)$的混合制系统；

$D/M/c/K$ 表示相继到达的间隔时间独立、服从定长分布，服务时间相互独立、服从负指数分布，系统中有 c 个服务台平行服务，容量为 $K(c\leqslant K<\infty)$的混合制系统；

$M^r/M/1/\infty$表示顾客是成批到达，每批到达为固定的 r 个顾客($1\leqslant r<\infty$)，批与批的到达间隔时间独立、服从负指数分布，顾客的服务时间独立、服从负指数分布，有一个服务台，系统容量为无穷的等待制系统；

$M^X/M^r/1/\infty$表示顾客是成批到达，每批到达的数量 X 是具有某个离散型概率分布律的随机变量，批与批的到达间隔时间独立、服

从负指数分布，而系统中有一个服务台，顾客是成批服务，每批为 r 个顾客，且服务时间独立、服从负指数分布，容量为无穷的等待制系统.

6. 描述排队系统的主要数量指标

1)队长与等待队长

队长是指在系统中的顾客数(包括正在接受服务的顾客)，而等待队长是指系统中排队等待的顾客数，它们都是随机变量，是顾客和服务机构双方都十分关心的数量指标，应确定它们的分布及有关矩(至少是期望平均值). 显然，队长等于等待队长加上正在被服务的顾客数.

2)顾客在系统中的等待时间与逗留时间

顾客的**等待时间**是指从顾客进入系统的时刻起直到开始接受服务止这段时间，而**逗留时间**是顾客在系统中的等待时间与服务时间之和. 在假定到达与服务是彼此独立的条件下，等待时间与服务时间是相互独立的. 等待时间与逗留时间是顾客最关心的数量指标，应用中关心的是统计平衡下它们的分布及期望平均值.

3)系统的忙期与闲期

从顾客到达空闲的系统，服务立即开始，直到系统再次变为空闲，这段时间是系统连续繁忙的时间，我们称为系统的**忙期**，它反映了系统中服务员的工作强度.

与忙期对应的是系统的**闲期**，即系统连续保持空闲的时间长度. 在排队系统中，统计平衡下忙期与闲期是交替出现的.

而**忙期循环**是指相邻的两次忙期开始的间隔时间，显然它等于当前的忙期长度与闲期长度之和.

4)输出过程

输出过程也称**离去过程**，是指接受服务完毕的顾客相继离开系统的过程. 刻画一个输出过程的主要指标是相继离去的间隔时间和在一段已知时间内离去顾客的数目，这些指标从一个侧面也反映了系统的工作效率.

此外，在不同的排队系统中，还会涉及到其它数量指标，例如在损失制与混合制排队系统中，顾客的损失率及单位时间内损失的平均顾客数，在多服务台并行服务的系统中，某个时刻正在忙的服务台数目，以及系统的利用率等.

§2 几个重要的概率分布

1. 定长分布(单点分布)

定义 1 设随机变量 X 以概率 1 取常值 a，即 $P\{X=a\}=1$，则称 X 服从定长分布或单点分布. 它的概率分布函数为

$$F(t)=P\{X\leqslant t\}=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geqslant a\end{cases} \tag{1}$$

2. 负指数分布

定义 2 一个连续型随机变量 X，若它的分布密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\lambda(>0)$ 为常数，则称随机变量 X 服从参数 λ 的负指数分布，其概率分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{3}$$

k 阶原点矩 $E[X^k]=\frac{k!}{\lambda^k}$ $(k=1,2,\cdots)$，方差 $D[X]=\frac{1}{\lambda^2}$.

引入一个无量纲的量

$$\varphi=\frac{\sqrt{D[X]}}{E[X]} \tag{4}$$

其中，假定 $E[X]\neq 0$，称 φ 为随机变量 X 的变异系数.

显然，服从负指数分布的随机变量的变异系数 $\varphi=1$，这是一个

随机变量服从负指数分布的必要条件. 如果一个随机变量的变异系数远离于 1,则可以认为该随机变量不会服从负指数分布.

定理 1 设连续型随机变量 X 服从参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布，则

1)对任意 $t\geqslant 0, s\geqslant 0$,有

$$P\{X>t+s|_{X>s}\}=P\{X>t\}=\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{5}$$

2)对任意一个与 X 相互独立的非负随机变量 Y,和任意 $t\geqslant 0$,在 $P\{X>Y\}>0$ 的条件下,有

$$P\{X>Y+t|_{X>Y}\}=P\{X>t\}=\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{6}$$

证明 1)由条件概率公式,有

$$\begin{aligned}P\{X>t+s|_{X>s}\}&=\frac{P\{X>t+s,X>s\}}{P\{X>s\}}\\&=\frac{P\{X>t+s\}}{P\{X>s\}}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\end{aligned}$$

2)同理,由条件概率公式和全概率分解,有

$$\begin{aligned}P\{X>Y+t|_{X>Y}\}&=\int_0^{\infty}P\{X>y+t|_{X>y}\}\mathrm{d}P\{Y\leqslant y\}\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}P\{Y\leqslant y\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\end{aligned}$$



我们把负指数分布的这个性质称为"**无记忆性**"或"**无后效性**".它的直观意义是,如果把 X 解释为机器的使用寿命,则该机器在使用了一段时间(这段时间可以是随机时间)还没有坏的条件下,它的剩余寿命仍然服从原来参数的负指数分布,与已使用过的时间无关.正因为负指数分布具有这个性质,在排队论和可靠性理论等领域内起着非常重要的作用.下面证明"无记忆性"也是负指数分布的充分条件,为此,不加证明地引进数学分析中的一个结果,其证明也可见参考文献[12].

引理 1 设 $g(x)$ 是一元函数,则 $g(x)=a^x(a>0)$ 的充分必要条件是

1)$g(x)$ 是 x 的连续(或单调)函数,$g(1)\neq 0$;

2)对任意 x、y,$g(x+y)=g(x)\cdot g(y)$

定理 2 设 X 是取非负值的连续型随机变量,

1)若 X 具有"无记忆性",则 X 服从负指数分布;

2)X 服从参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布的充分必要条件是对任给的 $t\geqslant 0$,$E[X-t|_{X>t}]=\frac{1}{\lambda}$

证明 1)任取 $x>0$,令 $g(x)=P\{X>x\}$,则 $g(x)$ 是右连续且单调.由于 X 的"无记忆性",则对任取的 $y>0$,有

$$\begin{aligned}g(x+y)&=P\{X>x+y\}\\&=P\{X>x+y|_{X>x}\}\cdot P\{X>x\}\\&=P\{X>y\}\cdot P\{X>x\}\\&=g(x)\cdot g(y)\end{aligned}$$

显然对一切 $x\geqslant 0$,$g(x)\geqslant 0$,所以 $g(1)\geqslant 0$.下面证 $g(1)>0$.

事实上,若 $g(1)=0$,则对任意正整数 n,有

$$g(1)=\left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=0$$

于是

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

令 $n\to\infty$,有 $g(0)=0$,这与 $g(0)=P\{X>0\}$ 相矛盾.于是 $g(1)>0$ 成立.再根据引理 1,有

$$g(x)=a^x(a>0)$$

由于 $g(x)=P\{X>x\}$ 是概率,所以 $0<a<1$($a=0$ 或 $a=1$ 均使得 $1-g(x)$ 不是概率分布函数).不妨令

$$a=e^{-\lambda},\quad \lambda>0$$

则

$$g(x)=e^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0$$

此式说明 X 服从负指数分布.

2)由负指数分布的“无记忆性”，必要性是明显的，现证充分性. 仍令

$$g(x)=P\{X>x\},\bar{g}(x)=1-g(x),\quad x\geqslant 0$$

则

$$\begin{aligned}E[X-t|_{X>t}]&=\int_t^{\infty}(x-t)\mathrm{d}P\{X\leqslant x|_{X>t}\}\\&=\int_t^{\infty}(x-t)\mathrm{d}\left[\frac{\bar{g}(x)-\bar{g}(t)}{g(t)}\right]\\&=\frac{1}{g(t)}\int_t^{\infty}(x-t)\mathrm{d}\bar{g}(x)\\&=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

于是

$$\int_t^{\infty}(x-t)\mathrm{d}\bar{g}(x)=\frac{1}{\lambda}g(t)$$

此式左边关于 t 可导，当然右边关于 t 也可导，因此

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[g(t)]=-\int_t^{\infty}\mathrm{d}\bar{g}(x)=-g(t)$$

于是

$$g(t)=c\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0$$

再由 $g(0)=1$ 定出 $c=1$，即 $g(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},t\geqslant 0$. 证毕.

3. k 阶爱尔朗(Erlang)分布

定义 3 如果连续型随机变量 X 的概率分布密度 $f(t)$ 为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}\tag{7}$$

则称 X 服从参数 $\lambda(>0)$ 的 k 阶爱尔朗分布，记为 E_k，其分布函数 $F(t)$ 为

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad t \geqslant 0 \tag{8}$$

期望平均值 $E[X]=\frac{k}{\lambda}$,方差 $D[X]=\frac{k}{\lambda^2}$,变异系数 $\varphi=\frac{1}{\sqrt{k}}$.

借用概率密度函数,用归纳法易证下面定理 3.

定理 3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是相互独立、服从相同参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布,则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_k$ 服从参数为 λ 的 k 阶爱尔朗分布.



由定理 3 知,一个服从 k 阶爱尔朗分布的随机变量可以表示为相互独立的服从负指数分布的 k 个随机变量之和.虽然爱尔朗分布不具有无记忆性,但由于它与负指数分布有这样密切的联系,因此可用负指数分布的特性去处理与爱尔朗分布有关的问题.

定理 4 设随机变量 X 服从 k 阶爱尔朗分布,则对一切 $x\geqslant 0$,有

$$\lim_{k\to\infty}P\left\{\frac{X-\frac{k}{\lambda}}{\sqrt{\frac{k}{\lambda^2}}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{9}$$

证明 由定理 3 知,$X=X_1+X_2+\cdots+X_k$,其中 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 相互独立、服从相同参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布.显然 $\{X_k,k\geqslant 1\}$ 服从中心极限定理,即对一切 $x\geqslant 0$,有上面式(9)成立.



由上可知,当 $k=1$ 时,E_1 分布即为负指数分布,当 $k\to\infty$ 时,E_k 分布近似正态分布.

4. **超指数分布**

定义 4 若连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}\tag{10}$$

其中 $\alpha_i>0$，且 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$，$\lambda_i(>0)$ 均为常数($i=1,2,\cdots,k$)，则称 X 服从超指数分布. 其概率分布函数为

$$F(t)=1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e^{-\lambda_i t},\quad t\geqslant 0\tag{11}$$

它的期望平均值 $E[X]=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\lambda_i}$，方差 $D[X]=2\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\lambda_i^2}-\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right)^2$.

超指数分布是负指数分布的一种混合分布，它的背景可作如下解释：设有 k 个服务台独立地并行服务，第 i 个服务台提供的服务时间服从参数 $\lambda_i(>0)$的负指数分布，到达的顾客以概率 α_i 选择第 i 个服务台接受服务($i=1,2,\cdots,k$)，这样顾客的服务时间就是超指数分布.

5. **泊松(Poisson)分布**

定义 5 若离散型随机变量 X 的概率分布律为

$$p_i=P\{X=i\}=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda},\quad i=0,1,2,\cdots\tag{12}$$

其中 $\lambda(>0)$为常数，则称 X 服从参数 λ 的泊松(Poisson)分布，其期望平均值 $E[X]=\lambda$，$D[X]=\lambda$.

§3 泊松过程(Poisson 流)

定义 1 考虑单个到达的输入过程，令 $N(t)$表示在时间$(0,t]$内到达的顾客数，则$\{N(t),t\geqslant 0\}$是连续时间参数的随机过程(计数过程). 如果满足：

1) $N(0)=0$;

2) $\{N(t),t\geqslant 0\}$有独立增量，即对任取的 n 个时刻：$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量 $N(t_1)-N(0),N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 是相互独立的；

3) $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$具有平稳增量，且对任意 $t\geqslant 0$ 与 $s\geqslant 0$，有

$$P\{N(t+s)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

其中 $\lambda(>0)$为常数，则称$\{N(t),t\geqslant 0\}$是泊松过程，也称 Poisson 流或最简单流.

上述定义中的第 2)条表示到达过程具有无后效性，即在不相交的时间区间内到达的顾客数是相互独立的，第 3)条表示在$(t,t+\Delta t]$内到达的顾客数只与时间区间的长度有关，而与起点无关，而且服从泊松分布，因此，对一个固定时刻 $t\geqslant 0$，在$(0,t]$内到达顾客的平均数 $E[N(t)]=\lambda t$，这样在单位时间内到达顾客的平均数为参数 λ，此为参数 λ 的物理意义.

根据第 3)条还可推得[9]，当 Δt 充分小时，有

$$P\{N(\Delta t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \tag{2}$$

$$P\{N(\Delta t)\geqslant 2\}=o(\Delta t) \tag{3}$$

下面定理反映了泊松过程与负指数分布有着密切的关系.

定理 1 $\{N(t),t\geqslant 0\}$是参数 $\lambda(>0)$的 Poisson 流的充分必要条件是$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$独立、同参数 λ 的负指数分布，其中$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$为到达的间隔时间序列.

证明 1)必要性. 设 $T_0=0$，T_n 表示第 n 个顾客的到达时刻，$n\geqslant 1$，则 $\tau_n=T_n-T_{n-1},n\geqslant 1$.

若$\{N(t),t\geqslant 0\}$为参数 $\lambda(>0)$的 Poisson 流，则

$$P\{\tau_1>t\}=P\{T_1>t\}$$

$$=P\{在(0,t]内没有到达\}$$
$$=P\{N(t)=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0$$

即 τ_1 服从参数 λ 的负指数分布.

类似地,对 $n>1$,有

$$P\{\tau_n>t\}=P\{T_n-T_{n-1}>t\}$$
$$=P\{在(T_{n-1},T_{n-1}+t]内没有到达\}$$
$$=\int_0^{\infty}P\{在(x,x+t]内没有到达\}\mathrm{d}P\{T_{n-1}\leqslant x\}$$
$$=\int_0^{\infty}P\{N(t+x)-N(x)=0\}\mathrm{d}P\{T_{n-1}\leqslant x\}$$
$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}P\{T_{n-1}\leqslant x\}=\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0$$

即 $\tau_n(n=1,2,\cdots)$服从相同参数的负指数分布.

下面证对任意正整数 n,有 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 相互独立.

事实上,

$$P\{\tau_1>t_1,\tau_2>t_2,\cdots,\tau_n>t_n\}$$
$$=P\{T_1>t_1,T_2-T_1>t_2,\cdots,T_n-T_{n-1}>t_n\}$$
$$=P\{N(t_1)=0,N(T_1+t_2)-N(T_1)=0,\cdots,N(T_{n-1}+t_n)-N(T_{n-1})=0\}$$
$$=\underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-1}P\{N(t_1)=0,N(x_1+t_2)-N(x_1)=0,\cdots,N(x_{n-1}+t_n)-N(x_{n-1})=0\}\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_{n-1})$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{e}^{-\lambda t_2}\cdots\mathrm{e}^{-\lambda t_n}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_{n-1})$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t_2}\cdots\mathrm{e}^{-\lambda t_n}$$

即 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 相互独立,其中 $F(x_1,\cdots,x_{n-1})$表示$(T_1,T_2,\cdots,T_{n-1})$的联合概率分布函数.

2)充分性.

a)显然 $N(0)=0$;

b)证明$\{N(t),t\geqslant 0\}$具有平稳增量,且对任取 $t\geqslant 0$ 与 $s\geqslant 0$,有

$$P\{N(t+s)-N(t)=m\}=\frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s},\quad m=0,1,2,\cdots$$

事实上，

$$\begin{aligned}P\{N(t+s)-N(t)=m\}&=P\{在(t,t+s]内到达 m 个\}\\&=P\{\hat{\tau}_k+\tau_{k+1}+\cdots+\tau_{k+m-1}\leqslant s<\hat{\tau}_k+\tau_{k+1}+\cdots+\tau_{k+m}\}\end{aligned}$$

其中 $\hat{\tau}_k$ 是 τ_k 的剩余到达间隔时间.

因为$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$相互独立、服从相同参数 λ 的负指数分布，所以 $\hat{\tau}_k,\tau_{k+1},\cdots,\tau_{k+m}$相互独立、服从相同参数 λ 的负指数分布，于是

$$\begin{aligned}&P\{N(t+s)-N(t)=m\}\\&=\int_0^s P\{\tau_{k+m}>s-x\}\cdot\frac{\lambda(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}dx\\&=\int_0^s e^{-\lambda(s-x)}\cdot\frac{\lambda(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}dx\\&=\frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s},\quad m=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

即过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$具有平稳增量.

c)用归纳法证$\{N(t),t\geqslant 0\}$有独立增量，即对任意的正整数 $n\geqslant 2$，取 n 个任意时刻 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，有随机变量 $N(t_1)-N(0)$，$N(t_2)-N(t_1)$，$\cdots$，$N(t_n)-N(t_{n-1})$相互独立.

当 $n=2$ 时，

$$\begin{aligned}&P\{N(t_1)-N(0)=k,N(t_2)-N(t_1)=m\}\\&=P\{N(t_1)=k,N(t_2)=k+m\}\\&=P\{s_k\leqslant t_1<s_k+\tau_{k+1},s_k+\tau_{k+1}+\cdots+\tau_{k+m}\\&\qquad\leqslant t_2<s_k+\tau_{k+1}+\cdots+\tau_{k+m+1}\}\\&=\int_0^{t_1}\Big[\int_{t_1-x}^{t_2-x}P\{\tau_{k+2}+\cdots+\tau_{k+m}\leqslant t_2-x-y\\&\qquad<\tau_{k+2}+\cdots+\tau_{k+m+1}\}\lambda e^{-\lambda y}dy\Big]\cdot dP\{s_k\leqslant x\}\\&=\int_0^{t_1}\int_{t_1-x}^{t_2-x}\frac{[\lambda(t_2-x-y)]^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda(t_2-x-y)}\cdot\lambda e^{-\lambda y}dy\,dP\{s_k\leqslant x\}\\&=\int_0^{t_1}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-x)}dP\{s_k\leqslant x\}\end{aligned}$$

$$=\int_0^{t_1}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{(\lambda t_1)^k}{k!}e^{-\lambda t_1}\cdot\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$=P\{N(t_1)-N(0)=k\}\cdot P\{N(t_2)-N(t_1)=m\},$$

$$k、m=0,1,2,\cdots$$

即 $n=2$ 时成立，其中 $s_k=\tau_1+\cdots+\tau_k,k\geqslant 1$，且 $s_0=0$.

假定 $n=k$ 时成立，即 $N(t_1)-N(0),N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_k)-N(t_k-1)$相互独立，对 $n=k+1$，令

$$A=\{N(t_1)-N(0)=m_1,\cdots,N(t_k)-N(t_{k-1})=m_k\}$$

则

$$P\{N(t_1)-N(0)=m_1,\cdots,N(t_k)-N(t_{k-1})=m_k,$$
$$N(t_{k+1})-N(t_k)=m\}$$
$$=P\{N(t_{k+1})-N(t_k)=m|A\}\cdot P\{A\}$$

在事件 A 发生的条件下，类似过程增量的平稳性的证明，有

$$P\{N(t_{k+1})-N(t_k)=m|A\}$$
$$=P\{\hat{\tau}_j+\tau_{j+1}+\cdots+\tau_{j+m-1}$$
$$\leqslant t_{k+1}-t_k<\hat{\tau}_j+\tau_{j+1}+\cdots+\tau_{j+m}\}$$

其中 $\hat{\tau}_j$ 为 τ_j 的剩余到达间隔时间，于是由负指数分布的无记忆性，有

$$P\{N(t_{k+1})-N(t_k)=m|A\}=\frac{[\lambda(t_{k+1}-t_k)]^m}{m!}\cdot e^{-\lambda(t_{k+1}-t_k)}$$

再根据归纳假设，并结合增量的平稳性即可得 $n=k+1$ 时成立，即 $\{N(t),t\geqslant 0\}$有独立增量．证毕．



下面介绍 Poisson 流的合成与分解.

定理 2 设$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$与$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$分别是参数 λ_1 与 λ_2 的 Poisson 流，且它们相互独立，则合成流$\{N_1(t)+N_2(t),t\geqslant 0\}$是

参数 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 流.

证明 1)显然 $N_1(0)+N_2(0)=0$;

2)任取 n 个时刻 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,令

$$N(t)=N_1(t)+N_2(t),\quad t\geqslant 0$$

则

$(t_1)-N(0)=[N_1(t_1)-N_1(0)]+[N_2(t_1)-N_2(0)],\cdots,$

$[N(t_n)-N(t_{n-1})]=[N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})]+[N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})]$

由于 $\{N_1(t),t\geqslant 0\}$ 与 $\{N_2(t),t\geqslant 0\}$ 是相互独立的 Poisson 流,所以

$N_1(t_j)-N_1(t_{j-1}),N_2(t_j)-N_2(t_{j-1}),j=1\sim n$,是相互独立的,于是 $N(t_1)-N(0),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立,即合成流有独立增量.

3)对任意 $t\geqslant 0,s\geqslant 0$,由于 $\{N_1(t),t\geqslant 0\}$ 与 $\{N_2(t),t\geqslant 0\}$ 是彼此独立的 Poisson 流,有

$$P\{[N_1(t+s)+N_2(t+s)]-[N_1(s)+N_2(s)]=k\}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\{N_1(t+s)-N_1(s)=m,N_2(t+s)-N_2(s)=k-m\}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}P\{N_1(t+s)-N_1(s)=m\}P\{N_2(t+s)-N_2(s)=k-m\}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{(\lambda_1 t)^m}{m!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^{k-m}}{(k-m)!}e^{-\lambda_2 t}$$

$$=\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},\quad k=0,1,2,\cdots$$

于是合成流为参数 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 流. 证毕.



定理 3 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流,每一到达顾客以概率 $p(0<p<1)$ 进入系统,令 $\tilde{N}(t)$ 表示 $(0,t]$ 内到达且进入系统的顾客数,则 $\{\tilde{N}(t),t\geqslant 0\}$ 是参数 λp 的 Poisson 流.

证明 1)显然 $\tilde{N}(0)=0$.

2)任取 n 个时刻 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,因为 $\tilde{N}(t_i)-\tilde{N}(t_{i-1})$ 只是在

$(t_{i-1},t_i]$内到达顾客数 $N(t_i)-N(t_{i-1})$ 的部分顾客，而 $N(t_1)-N(0),N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立，所以 $\tilde{N}(t_1)-\tilde{N}(0),\tilde{N}(t_2)-\tilde{N}(t_1),\cdots,\tilde{N}(t_n)-\tilde{N}(t_{n-1})$ 相互独立，即 $\{\tilde{N}(t),t\geqslant 0\}$ 有独立的增量.

3) 对任意 $t\geqslant 0,s\geqslant 0$，在 $N(t+s)-N(s)=n(n=0,1,2,\cdots)$ 条件下，$\tilde{N}(t+s)-\tilde{N}(s)$ 服从二项分布，

即

$$P\{\tilde{N}(t+s)-\tilde{N}(s)=k|_{N(t+s)-N(s)=n}\}$$
$$=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

所以

$$P\{\tilde{N}(t+s)-\tilde{N}(s)=k\}$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty}P\{\tilde{N}(t+s)-\tilde{N}(s)=k,N(t+s)-N(s)=n\}$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$
$$=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt},\quad k=0,1,2,\cdots$$

于是 $\{\tilde{N}(t),t\geqslant 0\}$ 为参数 λp 的 Poisson 流. 证毕.



上述定理说明，由若干相互独立的 Poisson 流经过一个合成后得到的流仍为 Poisson 流. 一个 Poisson 流经过一个随机过滤器(以概率 p 过滤)后得到的子流也为 Poisson 流. 到达十字路口的车流可看成流的合成，经过十字路口后又是流的分解. Poisson 流在实际生活中经常碰到，如市内交通事故，稳定情形下电话的呼叫次数，到车站等车的乘客数，上下班高峰过后通过十字路口的自行车流、人流、汽车流等都是或近似 Poisson 流.

§4 更新过程

定义 1 设 $\{\tau_i,i\geqslant 1\}$ 是相互独立的、取非负值的随机变量序列，

有共同的分布函数 $F(t)$. 假定 $F(0)<1$，且令

$$S_0=0,\quad S_n=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n,\quad n\geqslant 1$$

$$N(t)=\operatorname{Sup}\{n;S_n\leqslant t\}$$

则 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 称为**更新过程**，$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\cdots$ 称为**寿命或更新间隔时间**，$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ 称为**更新时刻**，而 $N(t)$ 称为 $(0,t]$ 内的**更新次数**.

对固定的 $t\geqslant 0$，令

$$M(t)=E[N(t)]$$

则 $M(t)$ 表示 $(0,t]$ 内的平均更新次数，称为**更新函数**.

易知 $\{N(t)\geqslant k\}$ 等价于 $\{S_k\leqslant t\}$，所以

$$\begin{aligned}M(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P\{N(t)=k\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\{N(t)\geqslant k\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}F^{(k)}(t)\ ,\quad t\geqslant 0\end{aligned}\tag{1}$$

而 $F^{(k)}(t)$ 为 $F(t)$ 的 k 重卷积，可证上述式(1)对任意有限 $t(\geqslant 0)$ 都是收敛(有限)的、非降和右连续的(参考文献[116]).

定义 2 称形如

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-x)\mathrm{d}F(x),\quad t\geqslant 0\tag{2}$$

的积分方程为**更新方程**. 其中 $a(t)$ 和 $F(t)$ 是已知的，且 $F(t)$ 是分布函数，而 $A(t)$ 是未知的.

定理 1 对更新方程式(2)，若 $a(t)$ 是有界函数，则在有限区间上，存在惟一的有界函数 $A(t)$ 满足

$$A(t)=a(t)+\int_0^t a(t-x)\mathrm{d}M(x)\tag{3}$$

其中 $M(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{(k)}(t)$ 为更新函数.

证明 1)证式(3)是式(2)的解.由式(3)有

$$\begin{aligned}A(t)&=a(t)+M(t)*a(t)\\&=a(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[F^{(k)}(t)*a(t)]\\&=a(t)+F(t)*\left[a(t)+\sum_{k=2}^{\infty}F^{(k-1)}(t)*a(t)\right]\\&=a(t)+F(t)*[a(t)+M(t)*a(t)]\\&=a(t)+F(t)*A(t)\\&=a(t)+\int_0^t A(t-x)\mathrm{d}F(x)\end{aligned}$$

即式(3)满足更新方程,其中 $*$ 表示卷积运算.

2)证对任何一个有限区间 $(0,T]$, $A(t)$ 有界.

事实上,

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{|A(t)|\}\\&\quad\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{|a(t)|\}\\&\quad+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{|a(t)|\}\cdot[M(T)-M(0)]<\infty\end{aligned}$$

3)证解式(3)惟一.设另有 $\widetilde{A}(t)$ 满足更新方程,即

$$\widetilde{A}(t)=a(t)+\int_0^t\widetilde{A}(t-x)\mathrm{d}F(x)$$

则

$$\widetilde{A}(t)=a(t)+\widetilde{A}(t)*F(t)\tag{4}$$

反复利用式(4),得

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(t)&=a(t)+\widetilde{A}(t)*F(t)\\&=a(t)+[a(t)+\widetilde{A}(t)*F(t)]*F(t)\\&=\cdots\cdots\\&=a(t)+\sum_{k=1}^{n-1}F^{(k)}(t)*a(t)+\widetilde{A}(t)*F^{(n)}(t)\end{aligned}\tag{5}$$

因为对任意有限 t，$M(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{(k)}(t)$ 收敛，所以当 $n\to\infty$ 时，有 $F^{(n)}(t)\to 0$. 于是当 $n\to\infty$ 时，有

$$\tilde{A}(t)=a(t)+a(t)*M(t)$$

此式表明 $\tilde{A}(t)=A(t)$，$t\geqslant 0$. 证毕.

定理 2（基本更新定理） 令 $\mu=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}F(t)<\infty$，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{\mu} \tag{6}$$

证明 1）证 $E[S_{N(t)+1}]=\mu[M(t)+1]$. 令

$$A(t)=E[S_{N(t)+1}]$$

则

$$A(t)=\int_0^{\infty}E[S_{N(t)+1}|_{\tau_1=x}]\mathrm{d}F(x)$$

而

$$E[S_{N(t)+1}|_{\tau_1=x}]=\begin{cases}x, & x>t\\ x+A(t-x), & x\leqslant t\end{cases} \tag{7}$$

所以

$$\begin{aligned}A(t)&=\int_0^{t}[x+A(t-x)]\mathrm{d}F(x)+\int_t^{\infty}x\mathrm{d}F(x)\\&=E[\tau_1]+\int_0^{t}A(t-x)\mathrm{d}F(x)\end{aligned} \tag{8}$$

即 $A(t)$ 满足更新方程，于是根据定理 1 知

$$\begin{aligned}A(t)&=E[\tau_1]+\int_0^{t}E[\tau_1]\mathrm{d}M(x)\\&=\mu[M(t)+1]\end{aligned}$$

2）证 $\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\geqslant\frac{1}{\mu}$. 因为

$$t<S_{N(t)+1}$$

所以取期望值，有

$$t < \mu[M(t)+1]$$

于是

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \geqslant \frac{1}{\mu} \tag{9}$$

3) $\lim\limits_{t\to\infty} \text{Sup} \dfrac{M(t)}{t} \leqslant \dfrac{1}{\mu}$. 事实上，考虑截尾过程：对任意固定的一个正数 d，令

$$\tau_n^* = \begin{cases} \tau_n, & \tau_n \leqslant d \\ d, & \tau_n > d \end{cases}, \quad n = 1,2,\cdots \tag{10}$$

则$\{\tau_n^*, n \geqslant 1\}$仍为更新过程. 令

$$S_0^* = 0, \quad S_n^* = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^*$$

$$N^*(t) = \text{Sup}\{n; S_n^* \leqslant t\}$$

则以概率 1，有

$$N^*(t) \geqslant N(t)$$

于是

$$M^*(t) \geqslant M(t), \quad t \geqslant 0$$

这样，$$\lim_{t\to\infty} \text{Sup} \frac{M^*(t)}{t} \geqslant \lim_{t\to\infty} \text{Sup} \frac{M(t)}{t} \tag{11}$$

由于 $t \geqslant S_{N^*(t)}^*$，所以 $t+d \geqslant S_{N^*(t)}^* + d \geqslant S_{N^*(t)+1}^*$，于是

$$t + d \geqslant \mu_d[M^*(t)+1]$$

这样

$$\lim_{t\to\infty} \text{Sup} \frac{M^*(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\mu_d} \tag{12}$$

其中 $\mu_d = E[\tau_1^*]$. 令 $d \to \infty$，有 $\mu_d \to \mu$，于是令 $d \to \infty$ 可得

$$\lim_{t\to\infty} \text{Sup} \frac{M^*(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\mu} \tag{13}$$

结合式(9)、式(11)与式(13)即完成定理的证明.

注:对 $\mu=\infty$,类似可证基本更新定理仍然成立.

定义 3 一个非负随机变量 X 称为**是格的(算术的)**,若存在 d $(\geqslant 0)$,使得 $\sum_{n=0}^{\infty} P\{X=nd\}=1$,此时也称对应的分布函数 $F(x)$**是格的**,否则称 $F(x)$**不是格的**.

注:根据上述定义,连续型随机变量的分布函数是非格的,取值 $0,1,2,\cdots$ 的离散型随机变量对应的分布函数是格的.

定义 4 设 $g(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数,对于任意 $\delta>0$,和任意正整数 n,令

$$m_n=\inf\{g(t):(n-1)\delta\leqslant t\leqslant n\delta\},\quad n=1,2,\cdots$$

$$M_n=\operatorname{Sup}\{g(t):(n-1)\delta\leqslant t\leqslant n\delta\},\quad n=1,2,\cdots$$

$$\Delta(\delta)=\delta\sum_{n=1}^{\infty} m_n,\qquad \Delta^*(\delta)=\delta\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

若极限

$$\lim_{\delta\to 0}\Delta(\delta) \text{ 与} \lim_{\delta\to 0}\Delta^*(\delta)$$

都收敛于同一极限值,则称函数 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是**直接黎曼可积的**.

根据直接黎曼可积的定义,并结合黎曼定积分存在的第一充分必要条件,易知直接黎曼可积的函数一定是黎曼可积函数,即通常意义下的定积分存在,而且由定义不难证明下面结论.

定理 3

1)在 $[0,+\infty)$ 上非负可积的单调函数是直接黎曼可积的.

2)设 $g(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负非降函数,$a>1$ 为常数,若 $\int_0^{\infty} g(t)a^{-t}\mathrm{d}t<\infty$ (可积),则 $g(t)a^{-t}$ 也是直接黎曼可积的.

3)设 $f(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负非增函数,$a>1$ 为常数,

若 $\int_0^\infty f(t)a^t\mathrm{d}t < \infty$（可积），则 $f(t)a^t$ 也是直接黎曼可积的.

4）在 $[0,+\infty)$ 上的两个直接黎曼可积函数的乘积也是直接黎曼可积的.

下面不加证明地给出关键更新定理[116]

定理 4（关键更新定理） 设非负随机变量 X 对应的分布函数为 $F(x)$，且 $\mu=\int_0^\infty x\mathrm{d}F(x)$，$a(t)$ 是直接黎曼可积的，$A(t)$ 是更新方程

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-x)\mathrm{d}F(x),\quad t\geqslant 0$$

的解，

1）若 $F(x)$ 不是格的，则

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^\infty a(x)\mathrm{d}x, & \mu<\infty\\ 0, & \mu=\infty\end{cases}\tag{14}$$

2）若 $F(x)$ 是格的，即 X 取非负离散值：$0,d,2d,\cdots,nd,\cdots(d>0)$，则对任意常数 $\delta(>0)$，有

$$\lim_{n\to\infty}A(\delta+nd)=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a(\delta+nd), & \mu<\infty\\ 0, & \mu=\infty\end{cases}\tag{15}$$

定理 5（更新函数的渐近展开） 设 $F(x)$ 是非格的分布函数，则

$$\lim_{t\to\infty}\left[M(t)-\frac{t}{\mu}\right]=\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}\tag{16}$$

其中 $\mu=\int_0^\infty x\mathrm{d}F(x)<\infty$，$\sigma^2=\int_0^\infty x^2\mathrm{d}F(x)-\mu^2<\infty$，即 σ^2 是分布函数的方差.

证明 令 $H(t)=M(t)+1-\dfrac{t}{\mu}$，则

$$H(t)=\frac{1}{\mu}E[S_{N(t)+1}-t]$$

而

$$E[S_{N(t)+1}-t]=\int_0^\infty E[S_{N(t)+1}-t\,|_{\tau_1=x}]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\mu\int_0^t H(t-x)\mathrm{d}F(x)+\int_t^\infty (x-t)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\mu\int_0^t H(t-x)\mathrm{d}F(x)+\int_0^\infty [1-F(t+y)]\mathrm{d}y$$

即

$$H(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1-F(t+y)]\mathrm{d}y+\int_0^t H(t-x)\mathrm{d}F(x)$$

此式表明 $H(t)$ 满足更新方程.

下面验证 $a(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1-F(t+y)]\mathrm{d}y$ 是直接黎曼可积的.

事实上，显然 $a(t)$ 关于 t 是单调减少的. 其次

$$\int_0^\infty a(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty [1-F(t+y)]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{t+y}^\infty \mathrm{d}F(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_t^\infty\int_0^{z-t}\mathrm{d}y\mathrm{d}F(z)\mathrm{d}t\text{（交换积分顺序）}$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_t^\infty (z-t)\mathrm{d}F(z)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_0^z (z-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}F(z)\text{（交换积分顺序）}$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty z^2\mathrm{d}F(z)=\frac{1}{2\mu}(\sigma^2+\mu^2)<\infty$$

于是，由关键更新定理，得

$$\lim_{t\to\infty}H(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mu^2}(\sigma^2+\mu^2)$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\left[M(t)-\frac{t}{\mu}\right]=\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$$

根据基本更新定理，我们得到：当 t 充分大时，$M(t)\approx\frac{t}{\mu}$，此处又有 $M(t)\approx\frac{t}{\mu}+\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$，于是后者在精度上比前者更进一步，它们在实际计算中有重要的应用价值.

另外，对于相互独立取非负值的随机变量序列 $\{\tau_n, n\geqslant 1\}$，若 τ_1 有分布 $F_1(t)$，$\tau_n(n=2,3,\cdots)$ 有分布 $F(t)$，则这样的更新过程称为**延迟更新过程**. 延迟更新过程具有更新过程类似的性质，此处不再列出，读者请见参考文献[116]

§5 马尔柯夫链

马尔柯夫链(Markov Chains)是一类重要的随机过程，它的状态空间是有限的或可数无限的. 经过一段时间系统从一个状态转到另一个状态这种进程只依赖于当前出发时的状态而与以前的历史无关. 马尔柯夫链有着广泛的应用，也是研究排队系统的重要工具.

1. 离散时间参数的马尔柯夫链

1)基本概念

定义 1 设 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程，状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$，如果对于任意的一组整数时间 $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k$，以及任意状态 $i_1、i_2、\cdots,i_k\in\mathbf{E}$，都有条件概率

$$P\{X(n_k)=i_k|_{X(n_1)=i_1,X(n_2)=i_2,\cdots,X(n_{k-1})=i_{k-1}}\}$$
$$=P\{X(n_k)=i_k|_{X(n_{k-1})=i_{k-1}}\} \tag{1}$$

即过程 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 未来所处的状态只与当前的状态有关，而与以前曾处于什么状态无关，则称 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个**离散时间参数的马尔柯夫链**. 当 $\mathbf{E}$ 为可列无限集时称其为**可列无限状态的马尔柯夫链**.

定义 2 设 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的马尔柯夫链，条件概率

$$p_{ij}(m,k) = P\{X(m+k) = j|_{X(m)=i}\}, \quad i、j \in \mathbf{E} \tag{2}$$

称为马尔柯夫链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$**在 m 时刻的 k 步转移概率**.

k 步转移概率的直观意义是:质点在时刻 m 处于状态 i 的条件下,再经过 k 步(k 个单位时间)转移到状态 j 的条件概率. 特别地,当 $k=1$ 时,

$$p_{ij}(m,1) = P\{X(m+1) = j|_{X(m)=i}\} \tag{3}$$

称为**一步转移概率**,简称**转移概率**.

如果 k 步转移概率 $p_{ij}(m,k)$,$i、j\in\mathbf{E}$,只与 k 有关,而与时间起点 m 无关,则$\{X(n)\}$称为**离散时间的齐次马尔柯夫链**.

定义 3 设$\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$是状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$上的马尔柯夫链,矩阵

$$\mathbf{P}(m,k) = \begin{bmatrix} p_{00}(m,k) & p_{01}(m,k) & \cdots & p_{0n}(m,k) & \cdots \\ p_{10}(m,k) & p_{11}(m,k) & \cdots & p_{1n}(m,k) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{j0}(m,k) & p_{j1}(m,k) & \cdots & p_{jn}(m,k) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{4}$$

称为$\{X(n)\}$**在 m 时刻的 k 步转移概率矩阵**

当 $k=1$ 时,$\mathbf{P}(m,1)$称为**一步转移概率矩阵**.

对于齐次马尔柯夫链,容易推得 k 步转移概率矩阵与一步转移概率矩阵具有关系

$$\mathbf{P}(m,k) = [\mathbf{P}(m,1)]^k, \quad k = 1,2,\cdots \tag{5}$$

而且与起始时刻 m 无关. 今后我们用 $p_{ij}(k)$表示齐次马尔柯夫链的 k 步转移概率,$\mathbf{P}(k)$为 k 步转移概率矩阵.

例 贝努里随机变量序列,即$\{X(n), n=1,2,\cdots\}$是独立、同分布 $P\{X(n)=0\}=q$,$P\{X(n)=1\}=p$,$0<p<1$,$p+q=1$,就是齐次的马尔柯夫链,其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} \tag{6}$$

2)平稳分布与存在条件

定义 4　给定齐次马尔柯夫链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$,称概率分布

$$p_j(0)=P\{X(0)=j\},\quad j\in\mathbf{E} \tag{7}$$

为$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的**初始分布**,其中$0\leqslant p_j(0)\leqslant 1$,且$\sum\limits_{j\in\mathbf{E}}p_j(0)=1$,而称概率分布

$$p_j(n)=P\{X(n)=j\},\quad j\in\mathbf{E} \tag{8}$$

为$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的**瞬时分布**,它表示过程在任意时刻n的概率分布.

如果极限

$$p_j=\lim_{n\to\infty}p_j(n),\quad j\in\mathbf{E} \tag{9}$$

存在,且$0\leqslant p_j\leqslant 1$,$\sum\limits_{j\in\mathbf{E}}p_j=1$,则称$\{p_j,j\in\mathbf{E}\}$为过程$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的**平稳分布**.

显然,对于齐次马尔柯夫链,它的瞬时概率由初始分布和转移概率矩阵完全确定,即

$$p_j(n)=\sum_{i\in\mathbf{E}}p_i(0)\cdot p_{ij}(n) \tag{10}$$

在平稳分布存在的条件下,由于式(10)可变为

$$p_j(n)=\sum_{i\in\mathbf{E}}p_i(n-1)\cdot p_{ij}(1) \tag{11}$$

令$n\to\infty$,得平稳分布$\{p_j,j\in\mathbf{E}\}$满足方程

$$(p_0,p_1,\cdots,p_j,\cdots)[\mathbf{I}-\mathbf{P}(1)]=\mathbf{O} \tag{12}$$

即

$$\begin{cases} (1-p_{00})p_0-p_{10}p_1-p_{20}p_2-\cdots-p_{i0}p_i-\cdots=0 \\ -p_{01}p_0-(1-p_{11})p_1-p_{21}p_2-\cdots-p_{i1}p_i-\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -p_{0i}p_0-p_{01}p_1-p_{21}p_2-\cdots-(1-p_{ii})p_i-\cdots=0 \end{cases} \tag{13}$$

再结合正规化条件 $\sum_{j\in\mathbf{E}}p_j=1$ 可求得平稳分布$\{p_j,j\in\mathbf{E}\}$.

方程式(12)或式(13)称为过程$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的**平衡方程**. 由平衡方程知,若平稳分布存在,它与初始状态无关,完全由一步转移概率矩阵确定.

但是,对给定的一个齐次马尔柯夫链,它满足什么条件时平稳分布才存在呢? 为此,下面简单介绍这方面的有关知识.

一个齐次马尔柯夫链,如果它的每一个状态都可以从另外任意一个状态出发经过若干步到达,即设 i、j 是任意两个状态,总可以找到一个正整数 m,使得 $p_{ij}(m)>0$,则称该齐次马尔柯夫链是**不可约的**,否则称为**可约的**.

记

$$f_{jj}(n)=P\{\text{从状态 } j \text{ 出发经过 } n \text{ 步首次回到 } j\}$$
$$f_{jj}=P\{\text{从状态 } j \text{ 出发回到 } j\}$$

则

$$f_{jj}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{jj}(n) \tag{14}$$

若 $f_{jj}=1$,说明从状态 j 出发回到 j 是必然事件,这时称状态 j 是**常返**的;若 $f_{jj}<1$,则称状态 j 是**非常返**的;若从状态 j 出发再返回到状态 j 的时间可以表示成 $d,2d,3d,\cdots$(这里 d 是满足上述要求的最大整数),则 d 称为状态 j 的**周期**. 如果 $d>1$,则称**状态 j 是周期的**,若 $d=1$,则称**状态 j 是非周期的**.

进一步考虑 $f_{jj}=1$ 这种常返状态,其平均返回时间为

$$\mu_{jj}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{jj}(n) \tag{15}$$

如果 $\mu_{jj}<\infty$,则称状态 j 是**正常返的**;若 $\mu_{jj}=\infty$,则称状态 j 是**零常返的**.

我们不予证明地给出如下结论,有兴趣的读者可参看参考文献[21,68,67,116].

定理 1　不可约的齐次马尔柯夫链的状态或全部是正常返的，或全部是零常返的，或全部是非常返的；如果有周期，则全部状态有相同的周期.

定理 2　不可约的非周期的齐次马尔柯夫链的下述极限概率

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = p_j, \quad j \in \mathbf{E} \tag{16}$$

总存在，且与初始状态无关. 进一步还有

1）　如果全部状态是非常返的或全部是零常返的，则

$$p_j = 0, \quad j \in \mathbf{E} \tag{17}$$

此时不存在平稳分布.

2）　如果全部状态是正常返的，则

$$p_j = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0, \quad j \in \mathbf{E} \tag{18}$$

而且$\{p_j, j\in E\}$满足等式

$$\sum_{j\in\mathbf{E}} p_j = 1, \quad p_j = \sum_{i\in\mathbf{E}} p_i \cdot p_{ij}(1), \quad j \in \mathbf{E} \tag{19}$$

因此$\{p_j, j\in \mathbf{E}\}$是惟一的平稳分布.

2. 连续时间参数的马尔柯夫链

1)基本概念

定义 5　设连续时间参数随机过程$\{X(t), t\geqslant 0\}$，状态空间$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$，如果对于任意的非负整数$n$，以及任意$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$及$i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}\in\mathbf{E}$，有

$$\begin{aligned} &P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} |_{X(t_k)=i_k, k=1,2,\cdots,n}\} \\ &= P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} |_{X(t_n)=i_n}\} \end{aligned} \tag{20}$$

则称$\{X(t), t\geqslant 0\}$为**连续时间参数的马尔柯夫链**.

定义 6　设$\{X(t), t\geqslant 0\}$为连续时间参数的马尔柯夫链，对任意$i、j\in\mathbf{E}$，非负实数$s、t\geqslant 0$，条件概率

$$p_{ij}(s,t) = P\{X(s+t) = j |_{X(s)=i}\} \tag{21}$$

称为其转移概率函数.

显然

$$0 \leqslant p_{ij}(s,t) \leqslant 1, \quad \sum_{j \in \mathbf{E}} p_{ij}(s,t) = 1 \tag{22}$$

若式(21)只与时间的间隔 t 有关,而与时刻的起点 s 无关,则称 $\{X(t),t \geqslant 0\}$ 为**连续时间参数的齐次马尔柯夫链**

一般地,我们要求齐次马尔柯夫链的转移概率函数满足如下的连续性条件:

$$\lim_{t \to 0^+} p_{ij}(0,t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{23}$$

2)平稳分布与存在条件

定义 7 给定连续时间参数的齐次马尔柯夫链 $\{X(t),t \geqslant 0\}$,称概率分布

$$p_j(0) = P\{X(0) = j\}, \quad j \in \mathbf{E} \tag{24}$$

为 $\{X(t),t \geqslant 0\}$ 的**初始分布**,其中 $0 \leqslant p_j(0) \leqslant 1$,且 $\sum_{j \in \mathbf{E}} p_j(0) = 1$,而称概率分布

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\}, \quad j \in \mathbf{E} \tag{25}$$

为 $\{X(t),t \geqslant 0\}$ 的**瞬时概率分布**,它表示过程在任意时刻 t 的概率分布.

如果极限

$$p_j = \lim_{t \to \infty} p_j(t), \quad j \in \mathbf{E} \tag{26}$$

存在,且 $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, $\sum_{j \in \mathbf{E}} p_j = 1$,则称 $\{p_j, j \in \mathbf{E}\}$ 为 $\{X(t),t \geqslant 0\}$ 的 **平稳分布**.

与离散时间参数的齐次马尔柯夫链一样,连续时间参数的齐次马尔柯夫链 $\{X(t),t \geqslant 0\}$ 的瞬时概率由初始分布和转移概率函数完全确定,即

$$p_j(t) = \sum_{i \in \mathbf{E}} p_i(0) \cdot p_{ij}(0,t) \tag{27}$$

在平稳分布存在的条件下,由于

$$p_j(s+t)=\sum_{i\in\mathbf{E}}p_i(s)\cdot p_{ij}(s,t) \tag{28}$$

令 $s\to\infty$，得平稳分布满足方程

$$p_j=\sum_{i\in\mathbf{E}}p_i\cdot p_{ij}(0,t),\quad j\in\mathbf{E} \tag{29}$$

因此，若知道转移概率函数，则结合 $0\leqslant p_j\leqslant 1$，$\sum_{j\in\mathbf{E}}p_j=1$ 可求得平稳分布$\{p_j,j\in\mathbf{E}\}$.

但是，从式(29)求得平稳分布往往是十分困难的，为此，下面引进 **Q 矩阵**.

定义 8 对于连续时间参数的齐次马尔柯夫链$\{X(t),t\geqslant 0\}$，状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$，若极限

$$q_{ii}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{ii}(0,t)}{t},\quad i\in\mathbf{E} \tag{30}$$

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(0,t)}{t},\quad i、j\in\mathbf{E} \tag{31}$$

存在，则称矩阵

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots\\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots\\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix} \tag{32}$$

为$\{X(t),t\geqslant 0\}$的**状态转移强度矩阵，简称 Q 一矩阵**.

对于满足连续性条件式(23)的连续时间参数的马尔柯夫链，其极限式(30)与式(31)都存在，且[21]

$$q_{ij}\geqslant 0,\quad q_{ii}=-\sum_{\substack{j\in\mathbf{E}\\ j\neq i}}q_{ij} \tag{33}$$

定理 3[21] 齐次不可约的连续时间参数的马尔柯夫链$\{X(t),t\geqslant 0\}$存在平稳分布$\{p_j,j\in\mathbf{E}\}$，且满足方程

$$(p_0, p_1, p_2, \cdots)\mathbf{Q} = \mathbf{O} \tag{34}$$

这样，根据式(34)，结合正规化条件 $0 \leqslant p_j \leqslant 1$，$\sum_{j \in \mathbf{E}} p_j = 1$ 可求得其平稳分布 $\{p_j, j \in \mathbf{E}\}$.

§6 生灭过程

定义 1 假定有一系统，设系统具有状态集 $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, \cdots, K\}$. 令 $N(t)$ 表示在时刻 t 系统所处的状态，且有

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta t) &= P\{N(t + \Delta t) = i + 1 \mid_{N(t)=i}\} \\ &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, K - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) &= P\{N(t + \Delta t) = i - 1 \mid_{N(t)=i}\} \\ &= \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 1, 2, \cdots, K \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} p_{ij}(\Delta t) &= P\{N(t + \Delta t) = j \mid_{N(t)=i}\} \\ &= o(\Delta t), \quad |i - j| \geqslant 2 \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\lambda_i > 0, i = 0, 1, \cdots, K-1, \mu_i > 0, i = 1, 2, \cdots, K$，均为常数，则称随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为**有限状态 $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, \cdots K\}$ 上的生灭过程**. 其状态转移强度图为

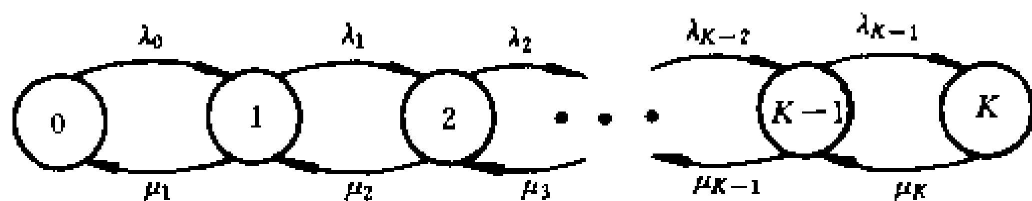


图 1.5

当系统状态为可列无限状态 $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 时，则称为**无限状态的生灭过程**，其状态转移强度图如图 1.6 所示.

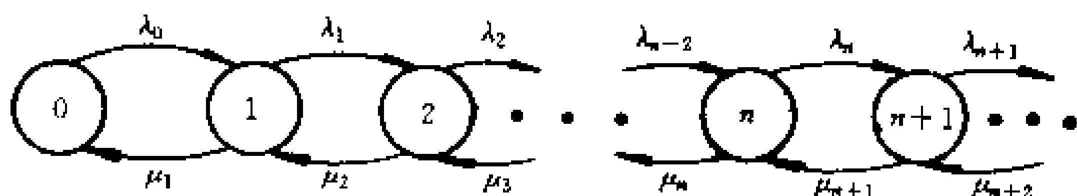


图 1.6

令

$$p_j(t) = P\{N(t) = j\}, \quad j \in \mathbf{E}$$

则由全概率公式，有

$$\begin{aligned}
p_j(t+\Delta t) &= \sum_{i \in \mathbf{E}} P\{N(t+\Delta t) = j|_{N(t)=i}\} \cdot p_i(t) \\
&= \sum_{i \in \mathbf{E}} p_i(t) \cdot p_{ij}(\Delta t) \\
&= p_j(t)[1 - \lambda_j \Delta t - \mu_j \Delta t + o(\Delta t)] \\
&\quad + p_{j-1}(t)[\lambda_{j-1}\Delta t + o(\Delta t)] \\
&\quad + p_{j+1}(t)[\mu_{j+1}\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{|i-j| \geqslant 2} p_i(t) \cdot o(\Delta t) \\
&= p_j(t)[1 - \lambda_j \Delta t - \mu_j \Delta t] + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t)\Delta t \\
&\quad + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{p_j(t+\Delta t) - p_j(t)}{\Delta t} = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0^+$，得生灭过程的微分差分方程为：

1）当 $\mathbf{E} = \{0,1,2,\cdots,K\}$ 时，有

$$\begin{cases}
p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\
p_j'(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) \\
\qquad\quad + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j = 1,2,\cdots,K-1 \\
p_K'(t) = -\lambda_{K-1} p_{K-1}(t) + \mu_K p_K(t)
\end{cases} \tag{4}$$

2）当 $\mathbf{E} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 时，有

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_j'(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \\ \qquad\qquad j = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{5}$$

下面定理 1 是参考文献[117]中的定理 11，定理 2 是参考文献[98]中定理 2 的直接推论，也可见参考文献[9].

定理 1（生灭过程微分差分方程组解的存在性）

1）对有限状态 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,K\}$ 的生灭过程，若满足 $p_j(t) \geqslant 0, \sum_{j=0}^{K} p_j(t) \leqslant 1$，则对任给的初始条件，方程组(4)的解存在、惟一，而且

$$p_j(t) \geqslant 0, \quad \sum_{j \in \mathbf{E}}^{K} p_j(t) = 1, \quad t \geqslant 0$$

2）对可列无限状态 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 的生灭过程，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2}{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1}\right) = \infty \tag{6}$$

而且满足 $p_j(t) \geqslant 0, \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) \leqslant 1$，则对任给的初始条件，方程组(5)的解存在、惟一，且 $p_j(t) \geqslant 0, \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) = 1, \quad t \geqslant 0$.

定理 2（极限定理） 令 $p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t), j \in \mathbf{E}$

1）对有限状态 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,K\}$ 的生灭过程，$\{p_j, j=0,1,\cdots,K\}$ 存在，与初始条件无关，且

$$p_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{K} p_j = 1$$

即 $\{p_j, j=0,1,\cdots,K\}$ 为平稳分布.

2）对无限状态 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 的生灭过程，若有条件

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} < \infty \quad （收敛） \tag{7}$$

及

$$\frac{1}{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda_j}=\infty \quad（发散） \tag{8}$$

成立，则$\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$存在，与初始条件无关，且$p_j>0$，$\sum_{j=0}^{\infty}p_j=1$，即$\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$为平稳分布.

定理 3 在$p_j=\lim_{t\to\infty}p_j(t)$存在的条件下，$j\in\mathbf{E}$，有

$$\lim_{t\to\infty}p_j'(t)=0, \quad j\in\mathbf{E} \tag{9}$$

证明 由上面定理知，微分差分方程组等式右边的极限存在，于是$\lim_{t\to\infty}p_j'(t)$存在，$j\in\mathbf{E}$.

若存在一个状态$j_0\in\mathbf{E}$，使得$\lim_{t\to\infty}p_{j_0}'(t)=d\neq0$，不妨设$d>0$，则对所取的$l(0<l<d)$，存在$t_0>0$，当$t\geqslant t_0$时，有

$$p_{j_0}'(t)\geqslant l$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}p_{j_0}(t)&=\lim_{t\to\infty}\left[p_{j_0}(t_0)+\int_{t_0}^{t}p_{j_0}'(x)\mathrm{d}x\right]\\&\geqslant p_{j_0}(t_0)+\lim_{t\to\infty}l\cdot(t-t_0)=\infty\end{aligned}$$

这与$p_{j_0}(t)\leqslant1$相矛盾. 故定理 3 得证.

▩

这样，在$\{p_j, j\in\mathbf{E}\}$存在的条件下，令$t\to\infty$，得平衡方程：

1）对$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,K\}$，有

$$\begin{cases}\lambda_0p_0=\mu_1p_1\\(\lambda_j+\mu_j)p_j=\lambda_{j-1}p_{j-1}+\mu_{j+1}p_{j+1}, \quad j=1,2,\cdots,K-1\\\lambda_{K-1}p_{K-1}=\mu_Kp_K\end{cases} \tag{10}$$

结合$\sum_{j=0}^{K}p_j=1$，可解得

$$p_j=\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)p_0, \quad j=1,2,\cdots,K \tag{11}$$

其中，$p_0 = 1\Big/\left[1 + \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right]$.

特别地，当 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{K-1}=\lambda, \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_K=\mu$ 时，有

$$\begin{cases} p_j = (\frac{\lambda}{\mu})^j p_0, \quad j = 1,2,\cdots,K \\ p_0 = 1\Big/\sum_{j=0}^{K}(\frac{\lambda}{\mu})^j \end{cases} \tag{12}$$

2) 对 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，有

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \\ (\lambda_j + \mu_j)p_j = \lambda_{j-1}p_{j-1} + \mu_{j+1}p_{j+1}, \quad j = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{13}$$

再结合 $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$，可得

$$p_j = \left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right) p_0 \tag{14}$$

其中，$p_0=1\Big/\left[1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right]$.

特别地，当 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda, \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu$ 时，只要 $\frac{\lambda}{\mu}<1$，则 $\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$ 存在，而且

$$p_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{15}$$

第二章　无限源的简单排队系统

所谓无限源的简单排队系统是指顾客的来源是无限的，输入过程是简单流，服务时间是负指数分布的排队系统．本章我们讨论一些典型的简单排队系统．

§1　$M/M/1/\infty$排队系统

1．问题的叙述

假定顾客到达为参数$\lambda(>0)$的 Poisson 流，即相继到达的间隔时间序列$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$独立、服从相同参数λ的负指数分布$F(t)=1-e^{-\lambda t},t\geqslant 0$；顾客所需的服务时间序列$\{\chi_n,n\geqslant 1\}$独立、服从相同参数$\mu(>0)$的负指数分布$G(t)=1-e^{-\mu t},t\geqslant 0$；系统中只有一个服务台，容量为无穷大，而且到达过程与服务过程是彼此独立的．

2．队长

假定$N(t)$表示在时刻t系统中的顾客数，包括正在被服务的顾客数，即$N(t)$表示时刻t系统的队长，$t\geqslant 0$，且令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|_{N(t)=i}\},\quad i、j=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

则

$$\begin{aligned}1)p_{i,i+1}(\Delta t)&=P\{\text{在 }\Delta t\text{ 内到达一个而服务未完成}\}\\&\quad+\sum_{j=2}^{\infty}P\{\text{在 }\Delta t\text{ 内到达 }j\text{ 个而服务完 }j-1\text{ 个}\}\\&=P\{\tau_1\leqslant\Delta t,\chi_1>\Delta t\}\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}P\{\tau_1+\cdots+\tau_j\leqslant\Delta t<\tau_1+\cdots+\tau_{j+1},$$

$$\chi_1+\cdots+\chi_{j-1}\leqslant\Delta t<\chi_1+\cdots+\chi_j\}$$

$$=(1-e^{-\lambda\Delta t})e^{-\mu\Delta t}+o(\Delta t)$$

$$=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\quad i=0,1,2,\cdots$$

2) $p_{i,i-1}(\Delta t)=P\{$在 Δt 内没有到达而完成一个服务$\}$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}P\{\text{在 }\Delta t\text{ 内到达 }j\text{ 个而服务完 }j+1\text{ 个}\}$$

$$=P\{\tau_1>\Delta t,\chi_1\leqslant\Delta t\}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\{\tau_1+\cdots+\tau_j\leqslant\Delta t<\tau_1+\cdots+\tau_{j+1},$$

$$\chi_1+\cdots+\chi_{j+1}\leqslant\Delta t<\chi_1+\cdots+\chi_{j+2}\}$$

$$=(1-e^{-\mu\Delta t})e^{-\lambda\Delta t}+o(\Delta t)$$

$$=\mu\Delta t+o(\Delta t),\quad i=1,2,\cdots$$

3)类似分析可得

$$p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\quad |i-j|\geqslant 2$$

综合，有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,i\geqslant 0\\ \mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i\geqslant 1\\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2\end{cases}\tag{2}$$

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$是可列无限状态 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda, & i\geqslant 0\\ \mu_i=\mu, & i\geqslant 1\end{cases}\tag{3}$$

注：在上面的分析中，有的应是到达的剩余间隔时间或剩余服务时间，但是，由于均服从负指数分布，而且为了书写方便，所以表示起来未加区别.

假定 $p_j(t)=P\{N(t)=j\}$，$j=0,1,2,\cdots$则此生灭过程的微分差

分方程组为

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_j'(t) = -(\lambda+\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t), \quad j \geqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

令 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$，则 ρ 称为系统的**交通强度**(traffic indensity). 根据生灭过程的极限定理易得如下结论.

定理 1 令 $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$，$j=0,1,2,\cdots$ 则

1）当 $\rho \geqslant 1$ 时，$p_j = 0$，$j=0,1,2,\cdots$ 不构成概率分布；

2）当 $\rho < 1$ 时，$\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$ 存在，与初始条件无关，而且

$$p_j = (1-\rho)\rho^j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{5}$$

构成一个几何概率分布.

于是，在统计平衡的条件下($\rho<1$)，平均队长为

$$\begin{aligned} \overline{N} = E[N] &= \sum_{j=0}^{\infty} j p_j \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \rho < 1 \end{aligned} \tag{6}$$

等待队长的分布

$$P\{N_q = j\} = \begin{cases} p_0 + p_1, & j = 0 \\ p_{j+1}, & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{7}$$

于是平均等待队长 $\overline{N}_q$ 为

$$\overline{N}_q = \sum_{j=1}^{\infty} j p_{j+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \rho < 1 \tag{8}$$

在等待条件下的等待队长分布为

$$\begin{aligned} P\{N_q = j |_{N_q \geqslant 1}\} &= \frac{P\{N_q = j, N_q \geqslant 1\}}{P\{N_q \geqslant 1\}} \\ &= \frac{P\{N_q = j\}}{P\{N_q \geqslant 1\}} \\ &= \frac{(1-\rho)\rho^{j+1}}{\rho^2} \end{aligned}$$

$$=(1-\rho)\rho^{j-1},\quad j\geqslant 1 \tag{9}$$

在等待条件下的平均等待队长为

$$E[N_q|_{N_q\geqslant 1}]=\frac{1}{1-\rho},\quad \rho<1 \tag{10}$$

另外，根据队长分布易知，$p_0=1-\rho$ 也是系统空闲的概率，而 ρ 正是系统繁忙的概率. 显然，ρ 越大，系统越繁忙.

3. **等待时间与逗留时间**

假定顾客是先到先服务的，因此，在统计平衡下，顾客的等待时间分布由如下定理确定.

定理 2 在统计平衡($\rho<1$)下，顾客的等待时间分布函数 $W_q(t)=P\{W_q\leqslant t\}$ 为

$$W_q(t)=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t},\quad t\geqslant 0 \tag{11}$$

平均等待时间为

$$\overline{W}_q=E[W_q]=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)},\quad \rho<1 \tag{12}$$

等待时间的方差为

$$D[W_q]=\frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2},\quad \rho<1 \tag{13}$$

证明 1)当 $t=0$ 时，有

$$\begin{aligned} W_q(0)&=P\{W_q=0\}\\ &=P\{\text{顾客到达时看到队长为 }0\}\\ &=p_0^- \end{aligned}$$

2)当 $t>0$ 时，有

$$\begin{aligned} W_q(t)&=P\{W_q=0\}+P\{0<W_q\leqslant t\}\\ &=p_0^-+\sum_{j=1}^{\infty}P\{0<W_q\leqslant t|_{\text{到达时看到队长为}j}\}\cdot p_j^- \end{aligned}$$

其中，p_j^- 表示顾客到达时看到有 j 个顾客的平稳概率. 对 $M/M/1/\infty$ 排队系统，有(见附录第十)

$$p_j^-=p_j,\quad j=0,1,2,\cdots$$

于是

$$W_q(t) = p_0^- + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\int_{0^+}^{t} \frac{\mu(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{d}x\right\}\cdot p_j^-$$

$$=(1-\rho) + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\int_{0^+}^{t} \frac{\mu(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{d}x\right\}\cdot (1-\rho)\rho^j$$

$$=1-\rho\mathrm{e}^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t>0$$

显然,平均等待时间 $\overline{W}_q$ 为

$$\overline{W}_q = \int_0^{\infty} t\mathrm{d}W_q(t)$$

$$=0\cdot(1-\rho) + \int_{0^+}^{\infty} t\cdot\mu(1-\rho)\rho\mathrm{e}^{-\mu(1-\rho)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

其方差 $D[W_q]$为

$$D[W_q] = E[W_q^2] - (E[W_q])^2$$

$$=\int_{0^+}^{\infty} t^2\cdot\mu(1-\rho)\rho\mathrm{e}^{-\mu(1-\rho)t}\mathrm{d}t - \frac{\rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

$$=\frac{2\lambda}{\mu(\mu-\lambda)^2} - \frac{\lambda^2}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}$$

$$=\frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}$$

至此定理 2 证毕.



由于顾客的逗留时间等于等待时间加上服务时间,即

$$W = W_q + \chi \tag{14}$$

且 W_q 与 χ 相互独立,于是

$$W(t) = P\{W\leqslant t\}$$

$$=\int_0^t P\{W_q\leqslant t-x\}\mathrm{d}P\{\chi\leqslant x\}$$

$$=\int_0^{t^-}\left[1-\rho e^{-\mu(1-\rho)(t-x)}\right]\cdot\mu e^{-\mu x}dx+(1-\rho)\cdot\mu e^{-\mu t} \tag{15}$$
$$=1-e^{-(\mu-\lambda)t},\quad t\geqslant 0$$

平均逗留时间为

$$\overline{W}=\overline{W}_q+E[\chi]$$
$$=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu-\lambda},\quad \rho<1 \tag{16}$$

其方差为

$$D[W]=D[W_q]+D[\chi]$$
$$=\frac{1}{(\mu-\lambda)^2},\quad \rho<1 \tag{17}$$

显然,很容易验证在 $M/M/1/\infty$ 排队系统中,Little 公式是成立的.

4. 忙期

显然,队长 $N(t)$ 由 0 变成 1 的时刻忙期就开始,此后 $N(t)$ 第一次又变回 0 时忙期就结束.由简单流与负指数分布的性质,显见忙期的长度与忙期的起点无关,因此,我们不妨令 $t=0$ 为忙期的起点,即 $N(0)=1$,而 $N(t)$ 第一次变成 0 的时刻为忙期的结束.前面已说明 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为生灭过程,其中参数 $\lambda_j=\lambda(j=0,1,2\cdots)$;$\mu_j=\mu(j=1,2,\cdots)$.

现在我们构造一个新的生灭过程 $\widetilde{N}(t)$,它与 $N(t)$ 的区别仅在于:新过程中的状态 0 为吸收的,也就是说,只要过程一转到状态 0 后,整个过程就停止,不再发生转移,即参数为

$$\begin{cases}\widetilde{\lambda}_0=0,\quad \widetilde{\lambda}_j=\lambda, j\geqslant 1\\ \widetilde{\mu}_j=\mu,\quad j\geqslant 1\end{cases} \tag{18}$$

因此,如果用 $\widetilde{N}(t)$ 来描述该系统的忙期的话,则可以说 $\widetilde{N}(0)=1$,即 $t=0$ 时忙期开始,到 $\widetilde{N}(t)$ 变到 0 时忙期就结束.令忙期长度为 b,则

$$B(t)=P\{b\leqslant t\}=P\{\widetilde{N}(t)=0\} \tag{19}$$

令 $$\widetilde{p}_j(t)=P\{\widetilde{N}(t)=j\},\quad j=0,1,2,\cdots$$

则

$$B(t) = \widetilde{p}_0(t), \quad t \geqslant 0 \tag{20}$$

因此，为了求忙期长度的分布，只需求 $\widetilde{p}_0(t)$. 容易导出 $\widetilde{p}_j(t)$ 的微分差分方程组：

$$\begin{cases} \widetilde{p}_0'(t) = \mu\widetilde{p}_1(t) \\ \widetilde{p}_1'(t) = -(\lambda+\mu)\widetilde{p}_1(t) + \mu\widetilde{p}_2(t) \\ \widetilde{p}_j'(t) = \lambda\widetilde{p}_{j-1}(t) - (\lambda+\mu)\widetilde{p}_j(t) + \mu\widetilde{p}_{j+1}(t), \quad j \geqslant 2 \end{cases} \tag{21}$$

令

$$\widetilde{P}(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{p}_j(t)\cdot z^j, \quad |z| < 1$$

由式(21)可得

$$z\cdot\frac{\partial\widetilde{P}(z,t)}{\partial t} = (1-z)(\mu-\lambda z)[\widetilde{P}(z,t) - \widetilde{p}_0(t)]$$

取拉普拉斯变换(Laplace)，对 $\mathscr{R}(s)>0$，令

$$\widetilde{P}^*(z,s) = \int_0^{\infty}\widetilde{P}(z,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\widetilde{p}_0^*(s) = \int_0^{\infty}\widetilde{p}_0(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

注意到初始条件

$$\widetilde{p}_j(0) = \begin{cases} 1, & j=1 \\ 0, & j>1 \end{cases}$$

即得

$$-z^2 + sz\widetilde{P}^*(z,s) = (1-z)(\mu-\lambda z)[\widetilde{P}^*(z,s) - \widetilde{p}_0^*(s)]$$

所以

$$\widetilde{P}^*(z,s) = \frac{z^2 - (1-z)(\mu-\lambda z)\widetilde{p}_0^*(s)}{sz - (1-z)(\mu-\lambda z)} \tag{22}$$

因为在 $|z|=1$ 上，当 $\mathscr{R}(s)>0$ 时，有

$$\begin{aligned} |-(\lambda z^2+\mu)| &\leqslant |\lambda z^2| + |\mu| = \lambda+\mu \\ &< |\lambda+\mu+s| = |(\lambda+\mu+s)z| \end{aligned}$$

所以由儒歇定理(见附录第六)，$-(\lambda z^2+\mu)+(\lambda+\mu+s)z$ 与 $(\lambda+\mu+s)z$ 在 $|z|<1$ 内有相同个数的零点，故式(22)的分母在单位圆 $|z|<$

1 内有惟一的零点为

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \mu + s - \sqrt{(\lambda + \mu + s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda} \tag{23}$$

为了保证$|\alpha_1|<1$，此处开方取正实部.

又由于$\widetilde{P}^*(z,s)$在$|z|<1$收敛，故$z=\alpha_1$也必为式(22)的分子的零点，于是

$$\widetilde{p}_0^*(s) = \frac{\alpha_1^2}{(1-\alpha_1)(\mu - \lambda\alpha_1)}$$

因为$s\alpha_1-(1-\alpha_1)(\mu-\lambda\alpha_1)=0$，故上式可写为

$$\widetilde{p}_0^*(s) = \frac{\alpha_1}{s} \tag{24}$$

但

$$\widetilde{p}_0^*(s) = -\frac{1}{s}\int_0^\infty \widetilde{p}_0(t)\mathrm{d}e^{-st} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\widetilde{p}_0'(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\widetilde{p}_0'(t)\mathrm{d}t = \alpha_1$$

由拉普拉斯变换的反演运算，即得忙期分布密度函数

$$\widetilde{p}_0'(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2t\cdot\sqrt{\lambda\mu}) \tag{25}$$

其中，$I_1(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}y\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$为修正贝塞尔(Bessel)函数，而且

$$B(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(\lambda\mu x^2)^{k-1}}{k!(k-1)!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x \tag{26}$$

因为

$$\lim_{t\to\infty}B(t) = \lim_{t\to\infty}\widetilde{p}_0^*(t) = \lim_{s\to 0^+} s\widetilde{p}_0^*(s) = \lim_{s\to 0^+}\alpha_1$$

$$=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\rho}, & \rho>1\end{cases} \tag{27}$$

所以当$\rho\leqslant 1$时，$B(t)$为真正的概率分布函数，当$\rho>1$时，$B(\infty)=$

$\frac{1}{\rho}<1$，$B(t)$不是概率分布函数.

平均忙期长度$\bar{b}$为

$$\bar{b}=E[b]=\int_0^\infty t\mathrm{d}B(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\tilde{p}_0(t)\right]\Big|_{s=0}$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\alpha_1]\Big|_{s=0}=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu-\lambda}, & \rho<1\\ \infty, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{28}$$

一个忙期中所服务的平均顾客数为

$$\mu\cdot\bar{b}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\rho}, & \rho<1\\ \infty, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{29}$$

5. 输出过程

不难看出，在忙期内相继输出的间隔时间是独立、同参数$\mu(>0)$的随机变量，即为参数μ的Poisson流. 但是，当系统空闲后，从开始空闲时刻起，到下一个顾客服务完毕离去时之间的间隔时间显然不与服务时间同分布.

令T_n^+表示第n个顾客服务完毕的离去时刻，则$T_{n+1}^+-T_n^+$表示离去的间隔时间，$n\geqslant 1$，于是，对$t\geqslant 0$

$$\begin{aligned}P\{T_{n+1}^+-T_n^+>t\}&=P\{N_n^+=0\}\cdot P\{T_{n+1}^+-T_n^+>t|_{N_n^+=0}\}\\&\quad+P\{N_n^+\geqslant 1\}\cdot P\{T_{n+1}^+-T_n^+>t|_{N_n^+\geqslant 1}\}\\&=P\{N_n^+=0\}\cdot P\{\hat{\tau}_{n+1}+\chi_{n+1}>t\}\\&\quad+P\{N_n^+\geqslant 1\}\cdot P\{\chi_{n+1}>t\}\end{aligned}$$

其中$\hat{\tau}_{n+1}$表示剩余到达间隔时间，与χ_{n+1}独立，而N_n^+表示第n个离去顾客服务完毕离开系统时的队长.

由于

$$\lim_{n\to\infty}P\{N_n^+=0\}=\begin{cases}1-\rho, & \rho<1\\ 0, & \rho\geqslant 1\end{cases}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} P\{T_{n+1}^{+} - T_{n}^{+} > t\} = (1-\rho)\left[\frac{\mu}{\mu-\lambda}e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\mu-\lambda}e^{-\mu t}\right] + \rho e^{-\mu t} = e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0$$

此式表示在统计平衡下，相继输出的间隔时间服从参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布.

参考文献[69]还证明了在统计平衡下输出的间隔时间相互独立，因此对 $M/M/1/\infty$ 排队系统，其平衡下的输出过程与到达过程相同.

例 1 某火车站一个售票窗口，若到达该窗口购票的顾客按 Poisson 流到达，平均每分钟到达 1 人，假定售票时间服从负指数分布，平均每分钟可售 2 人，试研究该售票窗口前的排队情况.

解 由题设知，$\lambda=1$(人/分)，$\mu=2$(人/分)，$\rho=\frac{1}{2}$. 该系统按 $M/M/1/\infty$ 型处理，于是在统计平衡下，有

$$p_j = (1-\rho)\rho^j = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

平均队长为 $\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = 1$(人)

平均等待队长为 $\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{2}$(人)

平均等待时间为 $\overline{W}_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{2}$(分钟)

平均逗留时间为 $\overline{W} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1$(分钟)

顾客到达不需等待的概率为 $p_0=\frac{1}{2}$，而等待队长超过 5 人的概率为

$$P\{N_q \geqslant 5\} = P\{N \geqslant 6\} = \sum_{k=6}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

例 2 考虑某种产品的库存问题. 如果进货过多，则会带来过多

的保管费，如果存货不足，则缺货时影响生产造成经济损失.最好的办法是能及时供应，但由于生产与运输等方面的因素，一般讲这是难以满足的，因此希望找到一种合理的库存量 s，使得库存费与缺货损失费的总和达到最小.假定需求是参数 λ 的 Poisson 流，生产是一个一个产品生产的，每生产一件产品所需时间为参数 μ 的负指数分布.库存一个产品的单位时间费用为 c 元，缺一个产品造成的损失费为 h 元，寻找一个最优库存量 s，使得库存费与损失费之和达到最小(不考虑产品的运输时间).

解 把生产产品的工厂看成是服务机构，需求看作是输入流，于是问题化成 $M/M/1/\infty$ 系统，需求量表示队长，p_k 表示生产厂有 k 个定货未交的概率.设库存量为 s，则缺货时的平均缺货数为

$$
\begin{aligned}
E_{缺} &= \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)p_n \\
&= \sum_{n=s}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n - s\sum_{n=s}^{\infty}(1-\rho)\rho^n \\
&= \sum_{n=s}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n - s\rho^s
\end{aligned}
$$

平均库存数

$$
\begin{aligned}
E_{存} &= \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)p_n \\
&= s\sum_{n=0}^{s-1}(1-\rho)\rho^n - \sum_{n=0}^{s-1} n(1-\rho)\rho^n \\
&= s(1-\rho^s) - \frac{\rho}{1-\rho} + \sum_{n=s}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n
\end{aligned}
$$

因此单位时间的期望总费用为

$$
\begin{aligned}
f(s) &= c\left[s(1-\rho^s) - \frac{\rho}{1-\rho} + \sum_{n=s}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n\right] \\
&\quad + h\left[\sum_{n=s}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n - s\rho^s\right] \\
&= cs - \frac{c\rho(1-\rho^s)}{1-\rho} + h\frac{\rho^{s+1}}{1-\rho}
\end{aligned}
$$

用边际分析法求解上式，使上式最小的 s 应满足

$$f(s-1)\geqslant f(s),\quad f(s+1)\geqslant f(s)$$

由 $f(s+1)\geqslant f(s)$，得

$$\rho^{s+1}\leqslant \frac{c}{c+h}$$

于是 $s\geqslant\left[\ln\frac{c}{c+h}\Big/\ln\rho\right]-1$

由 $f(s-1)\geqslant f(s)$，得

$$\rho^{s}\geqslant \frac{c}{c+h}$$

于是 $s\leqslant\ln\frac{c}{c+h}\Big/\ln\rho$.

这样有

$$\left[\ln\frac{c}{c+h}\Big/\ln\rho\right]-1\leqslant s\leqslant \ln\frac{c}{c+h}\Big/\ln\rho$$

取最佳 s^* 为最靠近 $\left(\ln\frac{c}{c+h}\right)\cdot(\ln\rho)^{-1}$ 的正整数即可.

例 3 设船按 Poisson 流进港口，平均每天到达 2 条，装卸时间服从负指数分布，平均每天装卸 3 条，求：1）平均等待队长与平均等待时间；2）如果船在港口的停留时间超过一个值 t_0 就要罚款，求遭罚款的概率；3）若每超过一天罚款 c 元，提前一天奖 b 元. 假定设备费与服务率成正比，每天 $h\mu$ 元，装卸一条船收入 a 元，求使港口每天收入最大的服务率 μ^* 的值.

解 1）由题意知，$\lambda=2$（条/天），$\mu=3$（条/天），$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2}{3}$，于是

平均等待队长为 $\bar{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{4}{3}$（条）

平均等待时间为 $\bar{W}_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{2}{3}$（天）

2）由于遭到罚款当且仅当船在港口的逗留时间超过 t_0，所以遭到罚款的概率为

$$p=P\{W\geqslant t_0\}=\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t_0}=\mathrm{e}^{-t_0}$$

3）从费用方面考虑，每天装卸完 λ 条船收入 λa 元，每天服务费

为 $h\mu$ 元.

平均提前完成时间为

$$t_{前}=\int_0^{t_0}(t_0-t)(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt$$
$$=t_0-\frac{1}{\mu-\lambda}[1-e^{-(\mu-\lambda)t_0}]$$

平均延后时间为

$$t_{后}=\int_{t_0}^{\infty}(t-t_0)(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt$$
$$=\frac{1}{\mu-\lambda}e^{-(\mu-\lambda)t_0}$$

所以港口一天的总收入为

$$f(\mu)=-\mu h+\lambda a-\lambda ct_{后}+\lambda bt_{前}$$
$$=-\mu h+\lambda a-\frac{c}{\mu-\lambda}e^{-(\mu-\lambda)t_0}+\lambda bt_0-\frac{\lambda b}{\mu-\lambda}$$
$$+\frac{\lambda b}{\mu-\lambda}e^{-(\mu-\lambda)t_0}$$
$$=-\mu h+\lambda\left(\frac{b-c}{\mu-\lambda}\right)e^{-(\mu-\lambda)t_0}-\frac{\lambda b}{\mu-\lambda}+\lambda(a+bt_0)$$

而

$$\frac{df(\mu)}{d\mu}=\frac{(\mu-\lambda)t_0+1}{(\mu-\lambda)^2}\left[\frac{\lambda b-h(\mu-\lambda)^2}{(\mu-\lambda)t_0+1}-\lambda(b-c)e^{-(\mu-\lambda)t_0}\right]$$

讨论：1)当 $b=c$ 时，

$$\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{\lambda b}{h}}$$

2)当 $b>c$ 时，

由于$\frac{df(\mu)}{d\mu}$的符号在 $\mu>\lambda$ 时完全由括号内的两项决定. 令

$$y_1=\frac{\lambda b-h(\mu-\lambda)^2}{(\mu-\lambda)t_0+1},\quad y_2=\lambda(b-c)e^{-(\mu-\lambda)t_0}$$

由图 2.1 看出，y_1 与 y_2 两曲线有惟一交点. 横坐标为 μ^*，且 μ^* 惟一存在、有限，$\mu^*<\lambda+\sqrt{\frac{\lambda b}{h}}$；

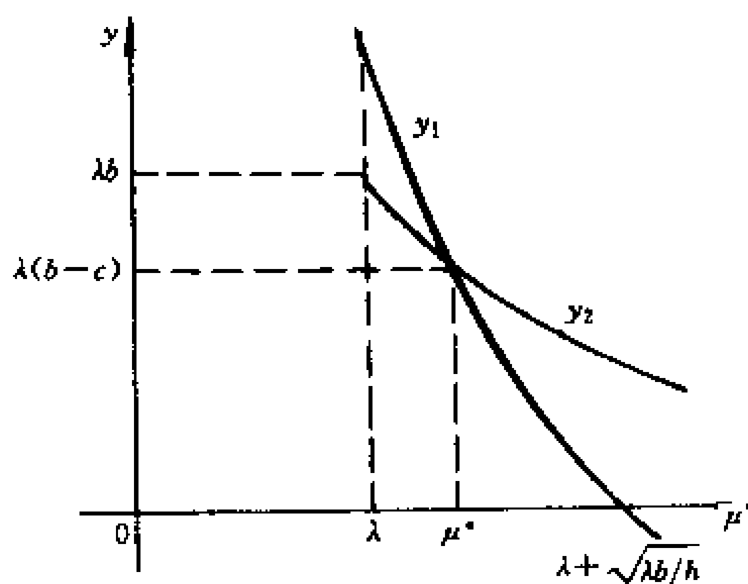


图 2.1

3）当 $b<c$ 时，由图 2.2 看出，两曲线仍有惟一交点，横坐标为 μ^*，且 μ^* 惟一存在、有限，$\mu^*>\lambda+\sqrt{\dfrac{\lambda b}{h}}$.

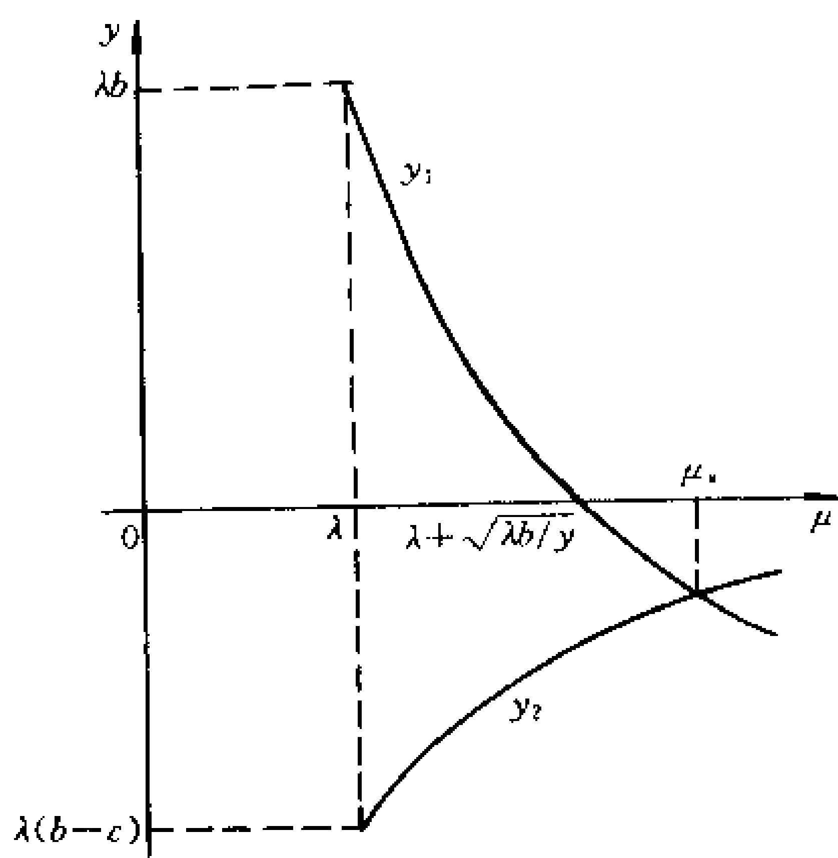


图 2.2

例 4 设顾客到达为 Poisson 流，平均每小时到达 λ 个顾客是已知的. 一个顾客在系统内逗留每小时损失 c_1 元，服务机构的费用正比于服务率 μ，每小时每位顾客的费用为 c_2 元. 假定服务时间为参数 μ 的负指数分布，求最佳服务率 μ^*，使得整个系统总费用最少？

解 由于平均队长为 $\overline{N}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$，所以每小时顾客的平均损失费为 $\frac{\lambda c_1}{\mu-\lambda}$ 元，每小时服务机构的平均费用为 $c_2\mu$ 元，于是单位时间内平均总费用为

$$f(\mu)=\frac{\lambda c_1}{\mu-\lambda}+c_2\mu$$

由

$$\frac{\mathrm{d}f(\mu)}{\mathrm{d}\mu}=-\frac{\lambda c_1}{(\mu-\lambda)^2}+c_2=0$$

得

$$\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_2}}$$

因为 $f''(\mu^*)=\frac{2\lambda c_1}{(\mu^*-\lambda)^2}>0$，所以最佳服务率为 μ^*，此时

$$f(\mu^*)=\sqrt{\lambda c_1 c_2}+\left(\lambda+\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_2}}\right)c_2$$

§2 具有可变输入率的 $M/M/1/\infty$ 排队系统

1. 问题的叙述

在实际中，尽管顾客源源不断到达，但并不一定都进入排队系统接受服务. 常见到的一种现象就是到达的顾客看到系统空闲或等待的顾客不多则进入系统接受服务，看到前面排着长队时则发生犹豫，考虑是否排队接受服务，这样，如果排队人数少他下决心进入系统接受服务的可能性就大，排队人数多则决心进入的可能性就小. 顾客进

入系统接受服务的可能性大小可用一概率表示，一般讲，它是队长的函数. 假定到达时看到队长为 k 时，进入系统的概率为 $\alpha_k(0<\alpha_k<1)$，且 $1=\alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_k\to 0(k\to\infty)$，即排队越长进入的可能性越小. 设到达为参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流，服务时间是参数 μ 的负指数分布，且到达与服务是彼此独立的，而其它假设条件与 §1 中 $M/M/1/\infty$ 排队系统完全一样. 下面我们仅对 $\alpha_k=\frac{1}{k+1}$ 这种情况进行讨论.

2. 队长

我们仍用 $N(t)$ 表示在时刻 t 系统中的顾客数，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|_{N(t)=i}\},\quad i、j=0,1,2,\cdots$$

则仿照 §1 中 $p_{ij}(\Delta t)$ 的推导，有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\frac{\lambda}{i+1}\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,i\geqslant 0\\ \mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i\geqslant 1\\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2\end{cases}\tag{1}$$

于是 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的生灭过程，其中参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=\frac{\lambda}{i+1}, & i=0,1,2\cdots\\ \mu_i=\mu, & i=1,2,\cdots\end{cases}\tag{2}$$

定理 1 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}\{N(t)=j\},j=1,2,\cdots$ 则对一切 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$，$\{p_j,j\geqslant 0\}$ 存在，与初始条件无关，且

$$p_j=\frac{\rho^j}{j!}e^{-\rho},\quad j=0,1,2,\cdots\tag{3}$$

构成参数为 ρ 的 Poisson 概率分布.

证明 显然对一切 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$，有

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^j}{j!}=e^{\rho}<\infty$$

$$\frac{1}{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda_j}=1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\rho^j}{j!}\right)^{-1}\cdot\frac{\lambda}{j+1}$$

$$=1+\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j!}{(j+1)\rho^j}=\infty$$

所以$\{p_j, j\geqslant 0\}$存在，与初始状态无关. 再根据生灭过程平稳分布公式易得式(3). 证毕.

这样，在统计平衡下，易得

平均队长 $$\overline{N}=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^j}{(j-1)!}e^{-\rho}=\rho \tag{4}$$

平均等待队长

$$\begin{aligned}\overline{N}_q&=\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)p_j=\sum_{j=1}^{\infty}jp_j-\sum_{j=1}^{\infty}p_j\\&=\overline{N}-(1-p_0)=\rho+e^{-\rho}-1\end{aligned} \tag{5}$$

3. 等待时间与逗留时间

假定先到先服务. 显然此处的等待时间是指到达且进入系统接受服务的顾客的等待时间.

定理 2 在统计平衡下，进入系统接受服务的顾客的等待时间分布函数为

$$\begin{aligned}W_q(t)&=P\{W_q\leqslant t\}\\&=1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\mu t)^j}{j!},\quad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{6}$$

而平均等待时间为

$$\overline{W}_q=\frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}-\frac{1}{\mu} \tag{7}$$

证明 设 p_j^- 表示到达的顾客看到系统中有 j 个顾客的平稳概率，由附录中第十知道，$p_j^-=p_j$, $j=0,1,2,\cdots$ 但是，此处到达的顾客

不一定进入系统，因此，若令 q_j 表示到达且进入系统的顾客看到有 j 个顾客的平稳概率，则

$$
\begin{aligned}
q_j &= P\{N^- = j|_{\text{该顾客能进入系统}}\} \\
&= \frac{P\{N^- = j, \text{该顾客能进入系统}\}}{P\{\text{该顾客能进入系统}\}} \\
&= \frac{P\{N^- = j\} \cdot P\{\text{该顾客能进入系统}|_{N^-=j}\}}{\sum_{i=0}^{\infty} P\{N^- = i\} \cdot P\{\text{该顾客能进入系统}|_{N^-=i}\}} \qquad (8) \\
&= \frac{p_j \cdot \frac{1}{j+1}}{\sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot \frac{1}{i+1}} = \frac{\rho^{j+1}}{(e^{\rho}-1)(j+1)!}, \quad j \geqslant 0
\end{aligned}
$$

于是，当 $t=0$ 时，有

$$
W_q(0) = q_0 = \frac{\rho}{e^{\rho}-1} \qquad (9)
$$

当 $t>0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
W_q(t) &= P\{W_q = 0\} + P\{0 < W_q \leqslant t\} \\
&= \frac{\rho}{e^{\rho}-1} + \sum_{j=1}^{\infty} P\{\hat{\chi} + \chi_1 + \cdots + \chi_{j-1} \leqslant t\} \cdot q_j
\end{aligned} \qquad (10)
$$

其中，$\hat{\chi}$ 表示正在接受服务的顾客的剩余服务时间，χ_i 为排队中第 i 个顾客的服务时间$(1 \leqslant i \leqslant j-1)$. 显然，$\hat{\chi}, \chi_1, \cdots, \chi_{j-1}$ 相互独立，服从参数 μ 的负指数分布，即 $\hat{\chi} + \chi_1 + \cdots + \chi_{j-1}$ 服从参数为 μ 的 j 阶爱尔朗分布，于是

$$
\begin{aligned}
W_q(t) &= \frac{1}{e^{\rho}-1}\left[\rho + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}\left(1 - e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(\mu t)^k}{k!}\right)\right] \\
&= \frac{1}{e^{\rho}-1}\left[e^{\rho} - 1 - e^{-\mu t}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(\mu t)^k}{k!}\right] \\
&= 1 - \frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(\mu t)^k}{k!}, \quad t > 0
\end{aligned}
$$

而平均等待时间为

$$
\bar{W}_q = E[W_q] = \sum_{j=0}^{\infty} E[W_q|_{N^-=j, \text{且进入}}] \cdot q_j
$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\mu} \cdot \frac{1}{(e^{\rho} - 1)} \cdot \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}$$

$$= \frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho} - 1)} - \frac{1}{\mu}$$

至此定理 2 证毕.



利用分布函数的卷积公式或类似等待时间分布函数的讨论，易得顾客逗留时间的分布函数

$$W(t) = 1 - \frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho} - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\mu t)^k}{k!}, \quad t \geqslant 0 \quad (11)$$

而平均逗留时间为

$$\overline{W} = \overline{W}_q + E[\chi] = \frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho} - 1)} \quad (12)$$

4. Little 公式

对于可变输入率的排队系统，由于一部分到达的顾客没有进入系统而造成流失，流失的大小可用概率表示. 显然顾客到达时，发现系统有 k 个顾客而离去的概率为 $1 - \alpha_k$，因此一个顾客到达没有进入系统而流失的概率为 $1 - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k p_k$. 相反地，一个顾客到达而进入系统的概率为 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k p_k$，这样单位时间内到达且进入系统的平均顾客数为

$$\lambda_e = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k p_k = \mu(1 - e^{-\rho}) \quad (13)$$

可以验证，在该系统中，Little 公式成立，即

$$\overline{N} = \lambda_e \overline{W}, \quad \overline{N}_q = \lambda_e \overline{W}_q$$

顺便指出，对其它形式的可变输入率也可进行类似的推导，处理

问题的思想方法几乎完全相同，而且对忙期的分析也类似本章§1中的讨论，有兴趣的读者可自己去推证.

§3 具有可变服务率的$M/M/1/\infty$排队系统

1. 问题的叙述

当服务台前出现排队现象时，排队的长短往往直接影响服务员的工作效率. 一般讲，当排队过长时服务员会提高服务速度，另一方面，对一个不熟练的服务员，当看到队长太长时可能反而慌张而降低了服务率. 本节我们考虑一个$M/M/1/\infty$排队系统，具有两个服务率μ_1、μ_2($\mu_1<\mu_2$)，当队长$<m$(m为一个固定的正整数)时，服务员用慢速率工作，即服务率μ_1，当队长$\geqslant m$时，服务员用速率μ_2工作，而其它方面的假设与本章§1完全一样.

2. 队长

假定$N(t)$表示时刻t系统中的顾客数，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|_{N(t)=i}\}$$

则仿照§1中$p_{ij}(\Delta t)$的推导，有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,i\geqslant 0\\ \mu_1\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i=0,1,\cdots,m-1\\ \mu_2\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i=m,m+1,\cdots\\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2\end{cases}\tag{1}$$

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$为$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$上的生灭过程. 其中参数为

$$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda;\quad \mu_j=\begin{cases}\mu_1, & j=1,2,\cdots,m-1\\ \mu_2, & j\geqslant m\end{cases}$$

定理1 令$\rho_1=\dfrac{\lambda}{\mu_1}$，$\rho_2=\dfrac{\lambda}{\mu_2}$，$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}$，$j\geqslant 0$，则

1)当$\rho_2\geqslant 1$时，$p_j=0$，$j=0,1,2,\cdots$

2）当 $\rho_2<1$ 时，$\{p_j, j\geqslant 0\}$ 存在，与初始条件无关，而且

$$p_j=\begin{cases}\rho_1^j p_0, & j=0,1\sim m-1\\ \rho_1^{m-1}\rho_2^{j-m+1}\cdot p_0, & j=m,m+1,\cdots\end{cases} \tag{2}$$

其中，$p_0=\left(\dfrac{1-\rho_1^m}{1-\rho_1}+\dfrac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2}\right)^{-1}$.

证明 利用生灭过程的极限定理易证.

∎

利用式(2)，容易求得统计平衡下系统的平均队长与平均等待队长分别为

$$\begin{aligned}\overline{N}=p_0\Bigg\{&\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^m-m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2}\\&+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\overline{N}_q=\overline{N}-(1-p_0) \tag{4}$$

3. 等待时间与逗留时间

假定顾客的服务顺序是按先到先服务规则进行的. 由于服务率是可变的，因此顾客的服务时间与该顾客接受服务时系统的队长有关，这样就不能使用前面的方式来讨论等待时间的分布函数. 但是，在统计平衡下顾客服务完毕离开系统时留在系统中的顾客数(不包括该离去顾客)等于在该顾客的逗留时间内到达的顾客数，即

$$\begin{aligned}p_j^+&=P\{N^+=j\}=P\{\text{在逗留时间 } W \text{ 内到达 } j \text{ 个顾客}\}\\&=\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dW(t),\quad j=0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{5}$$

由于当队长$<m$ 时，接受服务的顾客的服务时间服从参数为 μ_1 的负指数分布，当队长$\geqslant m$ 时，其服务时间服从参数为 μ_2 的负指数分布，因此在统计平衡下，某个顾客的服务时间分布依赖于当时的队长. 但是，在统计平衡下，有(见附录第十)

$$p_j^+=p_j,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{6}$$

令

$$P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j,\quad |z|\leqslant 1$$

则 $P(z)$ 称为队长分布 $\{p_j, j\geqslant 0\}$ 的**概率母函数**. 利用式(2),得

$$P(z)=p_0\left\{\frac{1-(z\rho_1)^m}{1-z\rho_1}+\frac{\rho_1^{m-1}\rho_2z^m}{1-z\rho_2}\right\},\quad |z|\leqslant 1 \tag{7}$$

由式(5),有

$$\begin{aligned}P(z)&=\sum_{j=0}^{\infty}z^jp_j=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\cdot\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dW(t)\\&=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda zt)^j}{j!}dW(t)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda(1-z)t}dW(t)\end{aligned} \tag{8}$$

对 $\mathscr{R}(s)>0$,令 $w(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dW(t)$,则 $w(s)$ 称为逗留时间分布函数 $W(t)$ 的 LS 变换,于是

$$P(z)=w(\lambda(1-z)),\quad |z|\leqslant 1 \tag{9}$$

令 $s=\lambda(1-z)$,则式(9)变为

$$\begin{aligned}w(s)&=P(1-\frac{s}{\lambda})\\&=p_0\left\{\frac{1-(\rho_1-\frac{s}{\mu_1})^m}{1-(\rho_1-\frac{s}{\mu_1})}+\frac{(\rho_1-\frac{s}{\mu_1})^{m-1}(\rho_2-\frac{s}{\mu_2})}{1-(\rho_2-\frac{s}{\mu_2})}\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

此式即为逗留时间分布函数的 LS 变换表达式. 经过 LS 变换的反演运算可得分布函数 $W(t)$,但一般情况下是很困难的.

利用公式

$$\overline{W}=E[W]=-\frac{d}{ds}[w(s)]|_{s=0} \tag{11}$$

立即可得平均逗留时间为

$$\overline{W}=\frac{1}{\lambda}p_0\left\{\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^m-m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2}\right.$$

$$+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\Bigg\} \tag{12}$$

虽然逗留时间等于等待时间加上服务时间，但是要求出服务时间分布函数是较困难的. 下面我们使用 Little 公式求出平均等待时间.

根据附录中第九，Little 公式对该系统是成立的，于是

$$\begin{aligned}\overline{W}_q &= \frac{\overline{N}_q}{\lambda} = \frac{N}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}(1-p_0)\\ &= \overline{W} - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}p_j\\ &= \frac{1}{\lambda}p_0\Bigg\{\frac{\rho_1^2+(m-2)\rho_1^{m+1}-(m-1)\rho_1^m}{(1-\rho_1)^2}\\ &\qquad + \frac{\rho_1^{m-1}\rho_2[(m-1)-(m-2)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{13}$$

这样，平均服务时间为

$$\begin{aligned}\frac{1-p_0}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}p_j\\ &= \frac{1}{\lambda}p_0\left\{\frac{\rho_1-\rho_1^m}{1-\rho_1}+\frac{\rho_1^{m-1}\rho_2}{1-\rho_2}\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

§4 $M/M/\infty$排队系统

1. 问题的叙述

在多个服务台的排队系统中，最简单的是服务台有足够多的情形，此时到达的每一个顾客都不需要等待立即接受服务，因此系统不会出现排队现象，如自服务系统、收听无线电广播系统、急诊救护车队系统、收看电视系统等都可近似看成这种系统. 假定顾客到达按参数 $\lambda(>0)$的 Poisson 流，每个顾客所需的服务时间服从参数为 $\mu(>0)$的负指数分布，系统中有无穷多(足够多)服务台，每个服务台是并

行独立进行服务的.

2. 队长

假定 $N(t)$ 表示在时刻 t 系统中的顾客数,此时也表示系统中正在忙的服务台个数,令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|_{N(t)=i}\}, \quad i、j = 0,1,2,\cdots$$

则

$$\begin{aligned} 1)\, p_{i,i+1}(\Delta t) = & P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达一个顾客,} \\ & \text{且 } i \text{ 个正忙的服务台一个服务也未完成}\} \\ & + \sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达 } j \text{ 个,} \\ & \text{且所有服务台共完成 } j-1 \text{ 个服务}\} \qquad (1) \\ = & P\{\tau_1 \leqslant \Delta t, \chi_1 > \Delta t, \cdots, \chi_i > \Delta t\} \\ & + \sum_{j=2}^{\infty} P\{\tau_1 + \cdots + \tau_j \leqslant \Delta t < \tau_1 + \cdots + \tau_{j+1}, \\ & \text{所有服务台完成 } j-1 \text{ 个服务}\} \\ = & \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\, p_{i,i-1}(\Delta t) = & P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内没有到达,} \\ & \text{且 } i \text{ 个正忙的服务台只完成一个服务}\} \\ & + \sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内到达 } j-1 \text{ 个,} \\ & \text{且服务台共完成 } j \text{ 个服务}\} \end{aligned}$$

由于 i 个正忙的服务台在 Δt 内完成一个服务,可以是其中任意一个服务台完成的,所以上式的第一项为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{i} P\{\tau_1 > \Delta t, \chi_1 > \Delta t, \cdots, \\ & \qquad \chi_{k-1} > \Delta t, \chi_k \leqslant \Delta t, \chi_{k+1} > \Delta t, \cdots, \chi_i > \Delta t\} \\ & = \sum_{k=1}^{i} \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t} \cdot (\mathrm{e}^{-\mu \Delta t})^{i-1} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\mu \Delta t}) \end{aligned}$$

$$=i\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

而

$$第二项=o(\Delta t)$$

于是

$$p_{i,i-1}(\Delta t)=i\mu\Delta t+o(\Delta t),\quad i=1,2,\cdots \tag{2}$$

3)当$|i-j|\geqslant 2$时,显然有 $p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t)$ (3)

综合1)~3),得

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,i=0,1,2,\cdots\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i=1,2,\cdots\\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2\end{cases} \tag{4}$$

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$为$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$上的生灭过程,其中$\lambda_j=\lambda,j\geqslant 0;\mu_j=j\mu,j\geqslant 1$.

定理 1 令$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$,$p_j(t)=P\{N(t)=j\}$,$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$,$j\geqslant 0$,则

1)$p_j(t)=\frac{1}{j!}[\rho(1-e^{-\mu t})]^j e^{-\rho(1-e^{-\mu t})},\quad t\geqslant 0$ (5)

2)$p_j=\frac{\rho^j}{j!}e^{-\rho},\quad j=0,1,2,\cdots$ (6)

证明 1)显然$\{p_j(t),j\geqslant 0\}$的微分差分方程组为

$$\begin{cases}p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)\\ p_j'(t)=\lambda p_{j-1}(t)-(\lambda+j\mu)p_j(t)+(j+1)\mu p_{j+1}, & j\geqslant 1\end{cases} \tag{7}$$

令

$$P(z,t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t)z^j$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}p_j'(t)z^j=&\lambda z\sum_{j=1}^{\infty}p_{j-1}(t)z^{j-1}-\lambda\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t)z^j\\ &-\mu z\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)\cdot jz^{j-1}+\mu\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p_{j+1}(t)z^j\\ =&\lambda zP(z,t)-\lambda P(z,t)-\mu z\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}+\mu\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}\end{aligned}$$

又

$$\sum_{j=0}^{\infty} p'_j(t) z^j = \frac{\partial P(z,t)}{\partial t}$$

所以得偏微分方程

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \mu(1-z)\frac{\partial P(z,t)}{\partial z} - \lambda(1-z)P(z,t) \qquad (8)$$

解偏微分方程，并注意到 $p_j(0)=\begin{cases}1, & j=1\\ 0, & j\neq 1\end{cases}$，得

$$P(z,t) = \mathrm{e}^{-\rho(1-\mathrm{e}^{-\mu t})} \cdot \mathrm{e}^{z\rho(1-\mathrm{e}^{-\mu t})} \qquad (9)$$

由于

$$P(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) z^j = \mathrm{e}^{-\rho(1-\mathrm{e}^{-\mu t})} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[z\rho(1-\mathrm{e}^{-\mu t})]^j}{j!}$$

所以

$$\begin{aligned} p_j(t) &= \frac{1}{j!} \cdot \frac{\partial^j P(z,t)}{\partial z^j}\Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{j!}[\rho(1-\mathrm{e}^{-\mu t})]^j \mathrm{e}^{-\rho(1-\mathrm{e}^{-\mu t})}, \quad j=0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

此即式(5).

2)利用生灭过程的极限定理或由 $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$ 直接可得.



对于 $M/M/\infty$ 排队系统，平均队长 $\bar{N}=\rho$. 因为有足够多的服务台，所以 $\bar{N}_q=0$，$\bar{W}_q=0$，逗留时间就是服务时间.

例 某航空港的飞机以 Poisson 流到达，平均每天到达 6 架运输货机. 设每个装卸小组装卸每架飞机的时间为负指数分布，平均每天装卸两架飞机. 若飞机留港时间过长，会造成机场拥挤，延误其它飞机起降，因此必须组成若干个装卸小组作业. 求：1)平均有多少个装卸小组在作业？ 2)为了使造成拥挤的概率小于 0.05，问至少应配备多少个装卸小组？ 3)需要多于 10 个装卸小组的概率是多少？

解 把该系统看成 $M/M/\infty$ 排队系统，$\lambda=6$（架/天），$\mu=2$（架/天），$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=3$.

1）$\overline{N}=\rho=3$（架）；

2）当装卸小组个数小于飞机架数时，即认为发生拥挤. 因此，若设装卸小组个数为 k，则系统达到平稳时应有

$$P\{N \geqslant k\} \leqslant 0.05$$

但

$$\begin{aligned} P\{N \geqslant 6\} &= 1 - P\{N \leqslant 5\} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{5} \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho} \approx 0.0837 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{N \geqslant 7\} &= P\{N \geqslant 6\} - P\{N = 6\} \\ &= 0.0837 - \frac{\rho^6}{6!} e^{-\rho} \\ &\approx 0.0333 < 0.05 \end{aligned}$$

所以 $k \geqslant 7$.

3）$P\{N > 10\} = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho} \approx 0.000\,01$

即同时需要多于 10 个作业组的概率约为十万分之一，所以无需准备无穷个装卸小组.

§5 $M/M/c/\infty$ 排队系统

1. 问题的叙述

本节我们考虑系统中有 $c(c\geqslant 1)$ 个服务台独立地并行服务. 当顾客到达时，若有空闲服务台便立刻接受服务，若没有空闲的服务台，则排队等待，直到有空闲的服务台时再接受服务. 假定顾客仍按参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流到达，每个顾客所需的服务时间独立、服从相同参数 $\mu(>0)$ 的负指数分布，系统容量为无穷大，而且到达与服务是

彼此独立的.

2. 队长

假定 $N(t)$ 表示在时刻 t 系统中的顾客数，令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|_{N(t)=i}\}$$

则类似 § 4 的分析，易得

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda\Delta t + o(\Delta t), & j = i+1, i \geqslant 0 \\ i\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = 1,2,\cdots,c-1 \\ c\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = c, c+1,\cdots \\ o(\Delta t), & |i-j| \geqslant 2 \end{cases} \tag{1}$$

于是 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的生灭过程，其中 $\lambda_j=\lambda, j\geqslant 0$；

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & 1\leqslant j<c \\ c\mu, & j\geqslant c \end{cases} \tag{2}$$

定理 1 令 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}, \rho_c=\dfrac{\lambda}{c\mu}, p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j=0,1,2,\cdots$ 则当 $\rho_c<1$，有 $\{p_j, j\geqslant 0\}$ 存在，与初始条件无关，且

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{j!}\rho^j p_0, & 1\leqslant j\leqslant c-1 \\ \dfrac{1}{c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j\geqslant c \end{cases} \tag{3}$$

其中，$p_0=\left[\sum\limits_{j=0}^{c-1}\dfrac{\rho^j}{j!}+\dfrac{c\rho^c}{c!\ (c-\rho)}\right]^{-1}$.

证明 根据生灭过程的极限定理易证.



由于现在系统中有 c 个服务台，所以顾客到达时需要等待的概率为

$$p = \sum_{j=c}^{\infty} p_j = \frac{1}{1-\rho_c}p_c, \quad \rho_c = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \tag{4}$$

其中，$p_c=\dfrac{\rho^c}{c!}p_0$.

为了求得平均队长与平均等待队长，在统计平衡下，等待队长 N_q 显然有分布

$$P\{N_q=0\}=\sum_{j=0}^{c}p_j,\quad P\{N_q=k\}=p_{c+k},\quad k=1,2,\cdots \tag{5}$$

所以当 $\rho_c<1$ 时，有

$$\begin{aligned}\overline{N}_q=E[N_q]&=\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)p_j\\&=\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)\frac{1}{c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0\\&=\frac{p_0\rho^c}{c!}\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)(\frac{\rho}{c})^{j-c}\\&=\frac{p_0\rho^c}{c!}\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)\rho_c{}^{j-c}\\&=\frac{\rho_c\rho^c p_0}{c!}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}x^j\Big)'\Big|_{x=\rho_c}\\&=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}\cdot p_c\end{aligned}\tag{6}$$

又令 N_c 表示系统平衡时，正在被服务的顾客数，则

$$P\{N_c=k\}=p_k,\quad k=0,1,2,\cdots,c-1;\quad P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{\infty}p_j \tag{7}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{N}_c=E[N_c]&=\sum_{j=0}^{c-1}jp_j+c\sum_{j=c}^{\infty}p_j\\&=\sum_{j=1}^{c-1}\frac{1}{(j-1)!}\rho^j p_0+\frac{p_0}{(c-1)!}\rho^c\sum_{j=0}^{\infty}\rho_c^j\\&=\rho\Big\{1-\sum_{j=c-1}^{\infty}p_j\Big\}+\frac{\rho^c}{(1-\rho_c)(c-1)!}p_0\\&=\rho\Big\{1-p_{c-1}-\sum_{j=c}^{\infty}p_j\Big\}+\frac{\rho^c}{(1-\rho_c)(c-1)!}p_0\end{aligned}$$

$$=\rho\left\{1-\frac{1}{(c-1)!}\rho^{c-1}p_0-\frac{p_0\rho^c}{c!}\cdot\frac{1}{1-\rho_c}\right\}$$

$$+\frac{\rho^c p_0}{(1-\rho_c)(c-1)!}$$

$$=\rho-\frac{\rho^c}{(c-1)!}p_0-\frac{\rho^{c+1}}{c!(1-\rho_c)}p_0$$

$$+\frac{\rho^c}{(c-1)!(1-\rho_c)}p_0$$

$$=\rho \tag{8}$$

与服务台个数 c 无关.

显然 $N=N_q+N_c$，所以平均队长 $\overline{N}$ 为

$$\overline{N}=\overline{N}_q+\overline{N}_c=\rho+\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}\cdot p_c,\quad \rho_c<1 \tag{9}$$

可以验证，当 $c=1$ 时，上述结果化为 $M/M/1/\infty$ 排队系统的有关结果，当 $c\to\infty$ 时，可化为 $M/M/\infty$ 排队系统的有关结果.

3. 等待时间与逗留时间

假定顾客按先到先服务的规则进行服务. 令 p_j^- 表示顾客到达系统发现已有 j 个顾客的平稳概率，则可以证明（见附录中第十）

$$p_j^-=p_j,\quad j=0,1,2,\cdots$$

于是有如下定理.

定理 2 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}<1$，在统计平衡下顾客的等待时间分布函数为

$$W_q(t)=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-\mu(c-\rho)t},\quad t\geqslant 0 \tag{10}$$

其平均等待时间为

$$\overline{W}_q=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}\cdot p_c \tag{11}$$

证明 1)当 $t=0$ 时,有

$$W_q(0)=P\{W_q=0\}=\sum_{j=0}^{c-1}p_j^-$$

$$=p_0\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}$$

2)当 $t>0$ 时,有

$$W_q(t)=P\{W_q=0\}+P\{0<W_q\leqslant t\}$$

$$=W_q(0)+\sum_{j=c}^{\infty}P\{0<W_q\leqslant t\}$$

$$=W_q(0)+\sum_{j=c}^{\infty}P\{0<W_q\leqslant t|_{N^-=j}\}p_j^-$$

在到达顾客看到已有 $j(j\geqslant c)$ 个顾客的条件下,由于服务台均在忙,所以该顾客必须等待 $(j-c+1)$ 个顾客服务完毕才能被服务. 在忙的条件下,由于每个服务台的离去均是参数为 μ 的 Poisson 流,因此 c 个服务台的离去流的合成是参数 $c\mu$ 的 Poisson 流,这样相继离去顾客的离去间隔时间服从参数为 $c\mu$ 的负指数分布,故该顾客的等待时间等于这 $(j-c+1)$ 个顾客相继离去的间隔时间之和,其分布为参数 $c\mu$ 的 $(j-c+1)$ 阶爱尔朗分布,即

$$P\{0<W_q\leqslant t|_{N^-=j}\}=\int_0^t\frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!}e^{-c\mu x}dx$$

于是

$$W_q(t)=W_q(0)+\sum_{j=c}^{\infty}\frac{p_0\rho^j}{c!c^{j-c}}\int_0^t\frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!}e^{-c\mu x}dx$$

$$=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}+\frac{p_c}{1-\rho_c}[1-e^{-(1-\rho_c)c\mu t}]$$

$$=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-\mu(c-\rho)t}$$

而平均等待时间

$$\overline{W}_q=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}W_q(t)$$

$$=0\cdot(1-\frac{p_c}{1-\rho_c})+\int_{0^+}^{\infty}\frac{p_c}{1-\rho_c}\cdot\mu(c-\rho)e^{-\mu(c-\rho)t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2} \cdot p_c$$

至此定理 2 证毕.

由于逗留时间 $W = W_q + \chi$，且 W_q 与 χ 独立，因此根据分布函数的卷积公式易得逗留时间分布函数为

$$W(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}\left[1 + \frac{p_c}{1-\rho_c}\mu t\right], & \rho = c - 1 \\ 1 - e^{-\mu t} - \frac{p_c}{(c-\rho-1)(1-\rho_c)}\left[e^{-\mu t} - e^{-\mu(c-\rho)t}\right], \\ \qquad \rho \neq c - 1 \end{cases} \tag{12}$$

而平均逗留时间为

$$\overline{W} = \overline{W}_q + \frac{1}{\mu} \tag{13}$$

可以验证，Little 公式成立.

4. **输出过程**

令 N_t 表示在一个顾客离去(从离去的时刻开始计时)之后又经过 t 时间时，在系统中的顾客数，平衡状态下有

$$P\{N_t = n\} = p_n, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

又令 T 表示平衡下相继离去的间隔时间，以及

$$F_n(t) = P\{N_t = n, T > t\}, \quad t \geqslant 0$$

显然

$$P\{T > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t), \quad t \geqslant 0 \tag{14}$$

下面建立 $F_n(t)$ 的微分差分方程，对增量 Δt，有

$$\begin{aligned} F_n(t+\Delta t) &= P\{N_{t+\Delta t} = n, T > t + \Delta t\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{N_{t+\Delta t} = n, T > t + \Delta t; N_t = j, T > t\} \end{aligned}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}F_j(t)\cdot P\{N_{t+\Delta t}=n,T>t+\Delta t|_{N_t=j,T>t}\}$$

$$=\begin{cases}F_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+F_n(t)[1-(\lambda+c\mu)\Delta t]\\+o(\Delta t),\quad c\leqslant n\\F_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+F_n(t)[1-(\lambda+n\mu)\Delta t]\\+o(\Delta t),\quad 1\leqslant n<c\end{cases}\tag{15}$$

$$F_0(t+\Delta t)=F_0(t)[1-\lambda\Delta t]+o(\Delta t)\tag{16}$$

于是,将上式右边不含 Δt 的项移到左边,然后用 Δt 除以两边,再令 $\Delta t\to0$,得

$$\begin{cases}F_n'(t)=-(\lambda+c\mu)F_n(t)+\lambda F_{n-1}(t),\quad c\leqslant n\\F_n'(t)=-(\lambda+n\mu)F_n(t)+\lambda F_{n-1}(t),\quad 1\leqslant n<c\\F_0'(t)=-\lambda F_0(t)\end{cases}\tag{17}$$

而初始条件为

$$F_n(0)=P\{N_0=n\}=p_n,\quad n=0,1,2,\cdots\tag{18}$$

解方程式(17),得

$$F_n(t)=p_n\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant0$$

于是

$$P\{T>t\}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant0$$

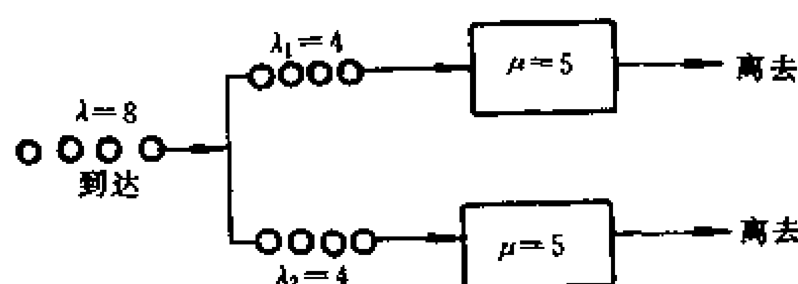
上式表明在统计平衡下相继离去的间隔时间服从参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布.

而参考文献[59]还证明了相继离去的间隔时间是相互独立的,因此,统计平衡下的输出过程与到达过程相同. 当 $c\to\infty$ 时,此乃 $M/M/\infty$ 系统,因此统计平衡下 $M/M/\infty$ 系统的输出过程仍与到达过程相同.

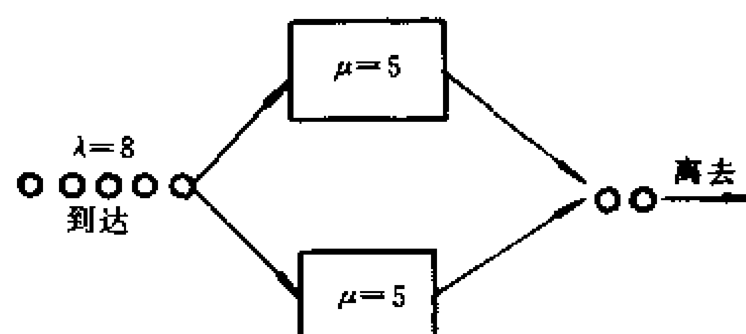
例 1 某售票点有两个售票窗口,顾客按参数 $\lambda=8$ 人/分钟的 Poisson 流到达,每个窗口的售票时间均服从参数 $\mu=5$ 人/分钟的负指数分布,试比较以下两种排队方案的运行指标:

1)顾客到达后，以$\frac{1}{2}$的概率站成两个队列，如图 2.3 中的(a)所示；

2)顾客到达后排成一个队列，顾客发现哪个窗口空闲时，他就接受该窗口的服务，如图 2.3 中的(b)所示.



(a)分解为两个平行系统



(b)两(多)通道排队系统

图 2.3

解 1)实质上分为两个独立的$M/M/1/\infty$系统，每个系统顾客的到达均为参数$\lambda_1=\lambda_2=4$(人/分钟)的 Poisson 流，且$\rho=\frac{4}{5}$，于是

$$p_0=1-\rho=0.2;\quad \bar{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=3.2(\text{人})$$

$$\bar{N}=\frac{\rho}{1-\rho}=4(\text{人});\quad \bar{W}_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=0.8(\text{分钟})$$

$$P\{N\geqslant 1\}=1-p_0=0.8(\text{等待的概率})$$

2)实质上为$M/M/2/\infty$系统，$\rho=\frac{8}{5}$，$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}=0.8$，于是

$$p_0=\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right)^{-1}=\left(1+1.6+\frac{2\times1.6^2}{2\times0.4}\right)^{-1}=0.111$$

$$\overline{N}_q=\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}p_0=\frac{1.6^3}{1\times0.4^2}\times0.111=2.84(\text{人})$$

$$\overline{N}=\overline{N}_q+\rho=2.84+1.6=4.44(\text{人})$$

$$\overline{W}_q=\frac{\overline{N}_q}{\lambda}=\frac{1}{8}\times2.84=0.355(\text{分钟})$$

$$P\{N\geqslant2\}=\frac{1}{1-\rho_c}p_c=\frac{1}{1-0.8}\times\frac{1.6^2}{2!}\times0.111=0.7104$$

以上结果表明，采用多服务员、单队列的排队系统方案，其各项运行指标都优于多队列的排队系统.

例 2 在 $M/M/c/\infty$ 排队系统中，设 λ、μ 已知，c 待定. 假定每个服务设备单位时间的成本为 $e_2\mu$ 元，每个顾客在系统逗留单位时间的损失费为 e_1 元，试确定最佳的 c^*，使得单位时间内的平均总费用最小?

解 令 $f(c)$ 表示单位时间内的平均总费用，则

$$\begin{aligned}f(c)&=ce_2\mu+e_1\overline{N}\\&=ce_2\mu+e_1\left[\rho+\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\cdot p_0\right]\\&=ce_2\mu+e_1\left[\rho+\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right)^{-1}\right]\\&=ce_2\mu+e_1\overline{J}(c)\end{aligned}$$

其中，$\overline{J}(c)=\rho+\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\ (c-\rho)^2}\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{\rho^c}{(c-1)!\ (c-\rho)}\right)^{-1}$

下面用边际分析法求最佳的 c^*. 因为 $f(c^*)$ 为最小值，所以

$$f(c^*)\leqslant f(c^*-1),\quad f(c^*)\leqslant f(c^*+1)$$

于是

$$\mathcal{J}(c^*-1)-\mathcal{J}(c^*)\geqslant\frac{e_2}{e_1}\mu$$

$$\mathcal{J}(c^*)-\mathcal{J}(c^*+1)\leqslant\frac{e_2}{e_1}\mu$$

因此，最佳的 c^* 应满足条件

$$\mathcal{J}(c^*)-\mathcal{J}(c^*+1)\leqslant\frac{e_2}{e_1}\mu\leqslant\mathcal{J}(c^*-1)-\mathcal{J}(c^*)$$

依次对 $c=1,2,\cdots$ 求出 $\mathcal{J}(c)$ 之值，并计算两个之差. 检查 $\frac{e_2}{e_1}\mu$ 落入上面不等式的哪个区间，从而可确定出最佳的 c^*.

§6　$M/M/c/K$ 混合制排队系统

1. 问题的叙述

考虑这样一种混合制排队系统，其系统中共有 K 个位置，c 个服务台独立地平行工作，$c\leqslant K$. 当 K 个位置已被顾客全部占用时，新到的顾客就自动离开，当系统中有空位置时，新到的顾客就进入系统排队等待服务. 我们仍然假定顾客按参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流到达，每个顾客所需的服务时间独立、服从相同参数 μ 的负指数分布，且到达与服务是彼此独立的.

2. 队长

假定 $N(t)$ 表示在时刻 t 系统中的顾客数，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|_{N(t)=i}\},\quad i、j=0,1,2,\cdots,K$$

则类似本章§5的分析易得

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,i=0,1,\cdots,K-1\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i=1,2,\cdots,c-1\\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,i=c,\cdots,K\\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2\end{cases}\tag{1}$$

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$为$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,K\}$上的生灭过程，其中

$$\lambda_i=\lambda,\quad i=0,1,\cdots,K-1;\quad \mu_i=\begin{cases} i\mu, & 1\leqslant i<c \\ c\mu, & c\leqslant i\leqslant K\end{cases} \tag{2}$$

定理 1 令$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}$，则对一切$\rho$，有

$$p_j=\begin{cases} \dfrac{\rho^j}{j!}p_0, & 1\leqslant j<c \\ \dfrac{1}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & c\leqslant j\leqslant K\end{cases} \tag{3}$$

其中$p_0=\left[\sum\limits_{n=0}^{c-1}\dfrac{1}{n!}\rho^n+\sum\limits_{n=c}^{K}\dfrac{1}{c!c^{n-c}}\rho^n\right]^{-1}$

证明 根据有限状态生灭过程的极限定理易证.

由于$M/M/c/K$是损失制，损失的概率为

$$p=p_K=\frac{1}{c!c^{K-c}}\rho^K p_0 \tag{4}$$

单位时间内平均损失的顾客数为

$$\bar{\lambda}_e=\lambda p_K \tag{5}$$

单位时间内平均进入系统的顾客数

$$\lambda_e=\lambda(1-p_K) \tag{6}$$

平均等待队长为

$$\begin{aligned}\overline{N}_q&=\sum_{n=c}^{K}(n-c)p_n\\&=\frac{p_0}{c!}\sum_{n=c}^{K}\frac{(n-c)}{c^{n-c}}\rho^n\\&=\frac{p_0}{c!}\sum_{n=c+1}^{K}\frac{(n-c)c^c}{c^n}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\\&=\frac{p_0c^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{K}(n-c)\rho_c^n\\&=\frac{p_0\rho^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{K}(n-c)\rho_c^{n-c-1}\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases}\frac{c^c}{2c!}(K-c)(K-c+1)p_0, & \rho_c=1\\ \frac{\rho_c\rho^c p_0}{c!(1-\rho_c)^2}[1-\rho_c^{K-c+1}-(1-\rho_c)(K-c+1)], & \rho_c\neq 1\end{cases} \tag{7}
$$

其中，$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}$.

又令 N_c 表示平衡时正在被服务的顾客数，则

$$
P\{N_c=j\}=p_j,\ j=0,1,\cdots,c-1;\quad P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{K}p_j
$$

于是 正在被服务的平均顾客数为

$$
\begin{aligned}
\overline{N}_c&=\sum_{n=0}^{c-1}np_n+c\sum_{n=c}^{K}p_n\\
&=\sum_{n=1}^{c-1}\frac{\rho^n}{(n-1)!}p_0+\frac{\rho^c}{(c-1)!}p_0+\sum_{j=c+1}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c-1}}p_0\\
&=\rho\left\{\sum_{j=0}^{c-2}\frac{\rho^j}{j!}p_0+\frac{\rho^{c-1}}{(c-1)!}p_0+\sum_{j=c+1}^{K}\frac{\rho^{j-1}}{c!c^{j-1-c}}p_0\right\}\\
&=\rho\left\{\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}p_0+\sum_{j=c}^{K-1}\frac{1}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0\right\}\\
&=\rho[1-p_K]
\end{aligned} \tag{8}
$$

于是，平均队长为

$$
\overline{N}=\overline{N}_q+\overline{N}_c=\overline{N}_q+\rho[1-p_K] \tag{9}
$$

3. 等待时间与逗留时间

假定顾客按先到先服务的规则进行服务. 设顾客到达时看到有 j 个顾客的平稳概率为 p_j^-，$j=0,1,2,\cdots,K$，则 $p_j^-=p_j$（见附录中第十），但是此处到达的顾客不一定能进入系统，因此，若令 q_j 表示到达且能进入系统的顾客看到有 j 个顾客的平稳概率，则

$$
\begin{aligned}
q_j&=P\{N^-=j|_{\text{新顾客能进入}}\}\\
&=\frac{P\{N^-=j\}\cdot P\{\text{新顾客能进入}|_{N^-=j}\}}{P\{\text{新顾客能进入}\}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{p_j}{1 - p_K}, \quad j = 0, 1, \cdots, K-1 \tag{10}$$

于是统计平衡下顾客的等待时间分布函数为

$$W_q(t) = P\{W_q \leqslant t\}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{c-1} q_j, & t = 0 \\ \sum_{j=0}^{c-1} q_j + \sum_{j=c}^{K-1} q_j \cdot \int_{0^+}^{t} \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x} dx, & t > 0 \end{cases} \tag{11}$$

平均等待时间为

$$\overline{W}_q = \sum_{j=c}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot q_j \tag{12}$$

平均逗留时间为

$$\overline{W} = \overline{W}_q + \frac{1}{\mu} \tag{13}$$

一些特殊情况：

1) $M/M/1/K$

$$p_j = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant K \tag{14}$$

$$\overline{N} = \begin{cases} \frac{K}{2}, & \rho = 1 \\ \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \end{cases} \tag{15}$$

$$\overline{N}_q = \begin{cases} \dfrac{K(K-1)}{2(K+1)}, & \rho = 1 \\ \dfrac{\rho^2}{1-\rho} - \dfrac{(K+\rho)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \end{cases} \tag{16}$$

$$W_q(t) = \begin{cases} q_0, & t = 0 \\ 1 - \sum_{j=1}^{K-1} q_j \{ \sum_{i=0}^{j-1} \dfrac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} \}, & t > 0 \end{cases} \tag{17}$$

此时逗留时间的分布函数为

$$W(t) = q_0 \sum_{j=0}^{K-1} \rho^j \{1 - e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{j} \frac{(\mu t)^i}{i!}\}, \quad t \geqslant 0 \tag{18}$$

2) $M/M/c/c$ 损失制系统：

① $p_j = [\rho^j / j!] \Big/ \sum_{i=0}^{c} \dfrac{\rho^i}{i!}, \quad j = 0,1,2,\cdots,c$ (19)

此为著名的**爱尔朗公式**.

②c 个服务台均忙的概率(或顾客损失的概率)

$$p_c = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{i=0}^{c} \dfrac{\rho^i}{i!}} \tag{20}$$

此为著名的**爱尔朗损失公式**,至今在电话交换站的设计中起着重大作用.

③由于不允许排队,所以

$$\overline{N}_q = 0, \quad \overline{N} = \overline{N}_c = \rho(1 - p_c)$$

$$\overline{W}_q = 0, \quad \overline{W} = \frac{1}{\mu}$$

说明 对 $M/M/c/K$ 系统,令 $K\to\infty$ 即为 $M/M/c/\infty$ 系统;令 $c=1, K\to\infty$ 即为 $M/M/1/\infty$ 系统;令 $c\to\infty$ 即为 $M/M/\infty$ 系统.

例 1 设有一个信息交换中心,信息流为 Poisson 流,每分钟到达 240 份,线路输出率是每秒 800 个字符,信息长度(包括控制字符)

近似负指数分布，平均长度 176 个字符. 要使在任何瞬间缓冲器充满的概率不超过 0.005，问缓冲器的容量 K 至少应取多大?

解 信息平均到达率 $\lambda=240$ 份/分$=4$ 份/秒，$\mu=\frac{800}{176}=4.546$ 份/秒，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.88$. 显然按 $M/M/1/K$ 系统处理，于是缓冲器充满的概率为

$$p_K=\frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

要使 $p_K\leqslant 0.005$，即 $(1-\rho)\rho^K/[1-\rho^{K+1}]\leqslant 0.005$，但是

$$p_{25}=0.009\,045,\quad p_{26}=0.004\,464<0.005$$

所以 $K\geqslant 26$，即缓冲器的容量至少应为 26 个单位.

例 2 假定有一个 $M/M/1/K$ 系统，设服务率为 μ(未知)，单位时间内单位服务成本为 e 元，每服务一个顾客获 g 元，在到达率 λ 给定的条件下，求最佳服务率 μ^*，使得单位时间内纯收入达到最大?

解 设 $f(\mu)$ 表示单位时间内的纯收入，则

$$\begin{aligned} f(\mu) &= \lambda g(1-p_K)-e\mu \\ &= \lambda g\left[1-\frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}\right]-e\mu \end{aligned}$$

因为 λ、g、e 为已知，所以 $f(\mu)$ 只是 μ 的函数. 由 $\frac{\mathrm{d}f(\mu)}{\mathrm{d}\mu}=0$，得

$$\rho^{K+1}\frac{K-(K+1)\rho+\rho^{K+1}}{(1-\rho^{K+1})^2}=\frac{e}{g}$$

由上式可得 $\rho^*=\frac{\lambda}{\mu^*}$，于是可得最佳服务率 $\mu^*=\frac{\lambda}{\rho^*}$.

如现有一个 $M/M/1/3$ 排队系统，其顾客到达率 $\lambda=3.6$ 人/小时，每个顾客所需的平均服务时间为 10 分钟，服务一个顾客收入 2 元，服务机构运行单位时间的费用为 1 元. 对这样一个系统，其单位时间内的纯收入为

$$\begin{aligned} f &= \lambda g(1-p_3)-e\mu \\ &= 0.46 \text{ 元} \end{aligned}$$

但是，按上面的最优方案定出 $\rho^*=1.21$，从而确定出最佳服务率 μ^*

$=\frac{\lambda}{\rho^*}=3$ 人／小时，于是在这样的服务率下，其单位时间内的纯收入为

$$f^*=1.86 \text{ 元}$$

显见，在给定的服务率 $\mu=6$ 人/小时下未必是最优的运营策略.

例 3 设某计算机有 4 个终端，用户按 Poisson 流到达，平均每 10 分钟到达 1.5 个用户. 假定每个用户平均用机时间为 20 分钟，用机时间服从负指数分布，如果 4 个终端已被占用，则用户到其它计算机处接受服务，求此系统的各种指标?

解 这是 $M/M/4/4$ 损失制系统，$\lambda=9$ 人/小时，$\mu=3$ 人/小时，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=3$.

顾客损失的概率为

$$p_4=\frac{3^4}{4!}\Big/\left(1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}\right)=0.235$$

单位时间内实际进入系统的平均顾客数为

$$\lambda_e=\lambda(1-p_4)=9\times(1-0.235)=6.885(\text{人}/\text{小时})$$

平均忙的终端数为

$$\overline{N}_c=\rho(1-p_4)=3\times(1-0.235)=2.295(\text{个})$$

第三章　有限源的简单排队系统

在第二章中我们所研究的排队系统，顾客的总体是无限的，而且顾客到达的间隔时间和所需的服务时间均为负指数分布．现在我们来研究一些顾客总体是有限的简单排队系统，这类排队系统的典型例子就是机器维修模型．

§1　$M/M/c/m/m$ 系统

1．问题的叙述

假定有 c 个工人共同看管 m 台（$m\geqslant c$）机器，机器运转时会发生故障而停止生产，这时需要由工人进行适当的修理，修复后立即投入运转．设每台机器的寿命，即连续正常运转时间 ζ 均服从参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布，即

$$P\{\zeta > t\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0$$

m 台机器各自独立运转，一旦发生故障，有空闲的工人立即对其进行修理，每个工人对每台发生故障的机器的修理时间 η 均服从参数 μ（>0）的负指数分布．如果没有空闲的工人，发生故障的机器就等待修理，直到有空闲的工人为止，而且设修理与运转相互独立，每个工人之间的修理也相互独立．

2．故障的机器数

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 发生故障的机器数目，令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|_{N(t)=i}\}$$

则

1）$p_{i,i+1}(\Delta t) = P\{$在 Δt 内 $m-i$ 台正常的机器有一台发生故障，而修复 0 台$\}$

$$+\sum_{k=2}^{m-i} P\{在 \Delta t 内又故障 k 台，而修复 k-1 台\}$$

$$=\begin{cases}(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & 0\leqslant i<c\\(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & c\leqslant i<m\end{cases} \tag{1}$$

2) $p_{i,i-1}(\Delta t)=P\{在 \Delta t 内又故障 0 台，而只修复一台\}$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} P\{在 \Delta t 内又故障 k 台，而修复 k+1 台\}$$

$$=\begin{cases}i\mu\Delta t+o(\Delta t), & 1\leqslant i<c\\c\mu\Delta t+o(\Delta t), & c\leqslant i\leqslant m\end{cases} \tag{2}$$

3) $p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\quad |i-j|\geqslant 2$ (3)

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$是有限状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,m\}$上的生灭过程，而且顾客源是有限的．其状态转移强度图如图 3.1 所示．

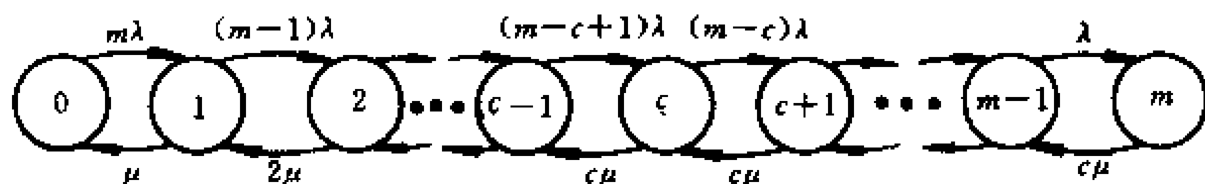


图 3.1

参数 $\lambda_i=(m-i)\lambda,\quad i=0,1,\cdots,m-1;\quad \mu_i=\begin{cases}i\mu, & i=1,2,\cdots,c-1\\c\mu, & i=c,\cdots,m\end{cases}$

定理 1 设 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\},j=0,1,\cdots,m$，则$\{p_j,0\leqslant j\leqslant m\}$存在，且

$$p_j=\begin{cases}\dbinom{m}{j}\rho^j p_0, & j=0,1,\cdots,c-1\\\dbinom{m}{j}\dfrac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,\cdots,m\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}\binom{m}{i}\rho^i+\sum_{i=c}^{m}\binom{m}{i}\dfrac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right]^{-1}$，$\binom{m}{j}$ 表示 m 中取 j 个的组合数，有 $\binom{m}{j}=m!/[j!\ (m-j)!]$，$0\leqslant j\leqslant m$.

特别地，当 $c=1$ 时，有

$$p_j=\frac{m!}{(m-j)!}\rho^j p_0,\quad j=1,\cdots,m \tag{5}$$

而

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{(m-j)!}\rho^j\right]^{-1}$$

证明 由生灭过程的极限定理易证.

∎

我们仍用 N 与 N_q 分别表示在统计平衡下发生故障的机器数与等待修复的机器数，则平均发生故障的机器数与平均等待修复的机器数分别为

$$\begin{aligned}\overline{N}&=\sum_{j=0}^{m}jp_j\\&=\sum_{j=1}^{c-1}\frac{m!}{(j-1)!(m-j)!}\rho^j p_0+\frac{m!}{c!}\sum_{j=c}^{m}\frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-c}}p_0\end{aligned} \tag{6}$$

$$\overline{N}_q=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j \tag{7}$$

3. **故障机器等待维修的时间分布**

假定机器先故障先维修. 令 p_j^- 表示在统计平衡下一台机器发生故障时已有 j 台机器早已处于故障状态的概率，由于在 j 台机器发生故障的条件下，只有 $m-j$ 台机器正常工作，根据负指数分布的无记忆性质和各个机器工作的独立性，我们有

$$p_j^- = k(m-j)p_j, \quad j=0,1,2,\cdots,m-1 \tag{8}$$

其中 k 为比例因子. 根据 $\sum_{j=0}^{m-1} p_j^- = 1$，可得

$$k = \frac{1}{m-\overline{N}} \tag{9}$$

于是

$$p_j^- = \frac{m-j}{m-\overline{N}} p_j, \quad j=0,1,2,\cdots,m-1 \tag{10}$$

此式也是参考文献[66]第 107 页中的式(6.2).

令 W_q 表示统计平衡下该故障机器的等待修理时间，则分布函数 $W_q(t)$ 为

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \sum_{j=0}^{c-1} p_j^- + \sum_{j=c}^{m-1} p_j^- \int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x} dx \\ &= 1 - \sum_{j=c}^{m-1} p_j^- e^{-c\mu t} \left\{ 1 + c\mu t + \cdots + \frac{(c\mu t)^{j-c}}{(j-c)!} \right\}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

在所有修理工均忙的条件下，新故障的机器必须等待前面 $j-c+1$ 台 故障机器修复后才能接受修理. 由于修理时间是负指数分布，一台机器发生故障时，各个正接受修理的机器的剩余修理时间仍服从相同参数的负指数分布. 在每个修理工均忙的条件下，每个修理工处的输出是参数 μ 的 Poisson 流，c 个独立工作的修理工组成的输出流是参数 $c\mu$ 的 Poisson 流，因此相邻修复完毕的故障机器之间的间隔时间应服从参数为 $c\mu$ 的负指数分布，而 c 个工人修复 $j-c+1$ 台机器的时间应服从参数为 $c\mu$ 的 $j-c+1$ 阶爱尔朗分布，于是等待修理的平均时间为

$$\overline{W}_q = \sum_{j=c}^{m-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot p_j^- = \frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})} \tag{12}$$

4. **其它重要指标**

1)平均忙的修理工人数为

$$\overline{N}_c = \sum_{j=1}^{c-1} jp_j + c \cdot \sum_{j=c}^{m} p_j \tag{13}$$

2)平均运行的机器数为

$$\overline{N}_m = \sum_{j=0}^{m} (m - j)p_j = m - \overline{N} \tag{14}$$

3)统计平衡下单位时间内发生故障的平均数为

$$\lambda_e = \lambda \sum_{j=0}^{m} (m - j)p_j = \lambda(m - \overline{N}) \tag{15}$$

4)统计平衡下单位时间内平均修复的机器数为

$$\lambda_\mu = \mu(\sum_{j=0}^{c-1} j \cdot p_j + c\sum_{j=c}^{m} p_j) = \mu \cdot \overline{N}_c \tag{16}$$

5)统计平衡下单位时间内平均修复的机器数等于发生故障的平均数,即

$$\lambda_e = \lambda_\mu \tag{18}$$

§2 $M/M/c/c/m$ 损失制系统

1. **问题的叙述**

假定有 m 台机器运转,c 个维修工人,当 c 个维修工都忙于维修故障的机器时,这时发生故障的机器不等待维修而是立刻送到其它地方去修理,或当这种情况出现时则是停产大修,其它有关假定条件与上面§1 相同.

2. **故障的机器数**

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 发生故障的机器数目,令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t + \Delta t) = j|_{N(t)=i}\}$$

则类似本章§1 的分析易得

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}(m-i)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1, i=0,1,\cdots,c-1\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1, i=1,\cdots,c\\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2\end{cases} \tag{1}$$

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$是状态空间$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,c\}$上的生灭过程，其状态转移强度图为

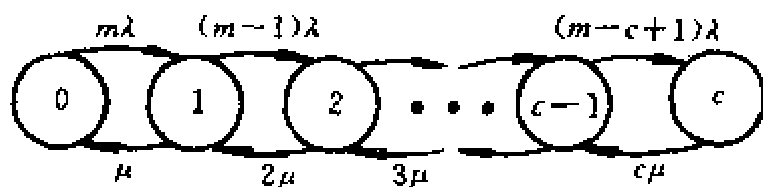


图 3.2

参数为$\lambda_i=(m-i)\lambda$，$i=0,1,\cdots,c-1$；$\mu_i=i\mu$，$i=1,2,\cdots,c$.

定理 1 令$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}$，$j=0,1,\cdots,c$，则$\{p_j,0\leqslant j\leqslant c\}$存在，且

$$p_j=\frac{\binom{m}{j}\rho^j}{\sum\limits_{k=0}^{c}\binom{m}{k}\rho^k},\quad j=0,1,2,\cdots,c \tag{2}$$

其中，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$\binom{m}{j}$表示$m$中取$j$个的组合数，$0\leqslant j\leqslant m$.

证明 根据生灭过程的极限定理易证.

上述分布$\{p_j,0\leqslant j\leqslant c\}$称为**恩格塞特(Engset)分布**，而

$$p_c(m)=\frac{\binom{m}{c}\rho^c}{\sum\limits_{k=0}^{c}\binom{m}{k}\rho^k} \tag{3}$$

称为**恩格塞特损失公式**，这是损失的概率. 特别地，当$m=c$时，即m台机器m个维修工人，此时

$$p_j = \frac{\binom{m}{j}\rho^j}{(1+\rho)^m}, \quad j = 0,1,2,\cdots,m \tag{4}$$

平均故障机器数为

$$\overline{N} = \sum_{j=0}^{m} j p_j = \frac{m\rho}{1+\rho} \tag{5}$$

§3 有备用品的 $M/M/c/m+K/m$ 系统

1. 问题的叙述

假定有 m 台机器正常工作，另有 K 台机器备用，有 c 个维修工人. 当运转的机器发生故障时，发生故障的机器立刻由维修工去修理，修好后转入备用. 如果处于正常运转的机器台数不足 m 台时，只好缺额生产. 依然假定每台机器的寿命 ζ 服从参数为 $\lambda(>0)$ 的负指数分布，故障后的维修时间 η 服从参数为 μ 的负指数分布，而且每台机器的运转、故障后的修理、运转与修理均是相互独立的.

2. 故障的机器数

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 故障机器的台数，令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|_{N(t)=i}\}$$

则仿照本章§1 的讨论，得

1）当维修工人数小于等于备用机器台数，即 $c \leqslant K$ 时，有

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} m\lambda\Delta t + o(\Delta t), & j = i+1, i = 0,1,\cdots,K \\ (m-i+K)\lambda\Delta t + o(\Delta t), & j = i+1, \\ & i = K+1,\cdots,m+K-1 \\ i\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = 1,\cdots,c-1 \\ c\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = c,\cdots,m+K \\ o(\Delta t), & |i-j| \geqslant 2 \end{cases} \tag{1}$$

于是当$c\leqslant K$时，$\{N(t),t\geqslant 0\}$为状态空间$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,m+K\}$上的生灭过程，其状态转移强度图如图 3.3 所示.

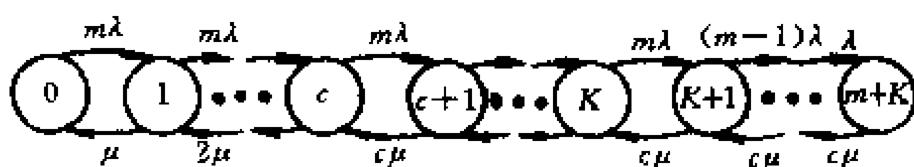


图 3.3

参数为

$$\lambda_i=\begin{cases}m\lambda, & 0\leqslant i<K\\ (m-i+K)\lambda, & K\leqslant i<m+K\end{cases};\quad \mu_i=\begin{cases}i\mu, & 0\leqslant i<c\\ c\mu, & c\leqslant i\leqslant m+K\end{cases}\tag{2}$$

定理 1 令$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\},j=0,1,\cdots,m+K$，则$\{p_j,0\leqslant j\leqslant m+K\}$存在，且

$$p_j=\begin{cases}\dfrac{m^j}{j\,!}\rho^j p_0, & 1\leqslant j<c\\ \dfrac{m^j}{c^{j-c}\cdot c\,!}\rho^j p_0, & c\leqslant j<K\\ \dfrac{m^K\cdot m\,!}{(m-j+K)\,!\,c^{j-c}\cdot c\,!}\rho^j p_0, & K\leqslant j\leqslant m+K\end{cases}\tag{3}$$

其中，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，

$$p_0=\Big[\sum_{i=0}^{c-1}\frac{m^i}{i\,!}\rho^i+\frac{1}{c\,!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i+\frac{m^K\cdot m\,!}{c\,!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{\rho^i}{c^{i-c}(m-i+K)\,!}\Big]^{-1}$$

证明 由生灭过程的极限定理易证.

2)当维修工人数大于备用机器台数，即$c>K$时，有

$$
p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases} m\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1, i=0,1,\cdots,K-1 \\ (m-i+K)\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1, \\ & i=K,\cdots,K+m-1 \\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1, i=1,\cdots,c-1 \\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1, i=c,\cdots,K+m \\ o(\Delta t), & |i-j|\geqslant 2 \end{cases} \tag{4}
$$

于是此时$\{N(t),t\geqslant 0\}$仍为$\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,m+K\}$上的生灭过程，但状态转移强度图如图 3.4 所示.

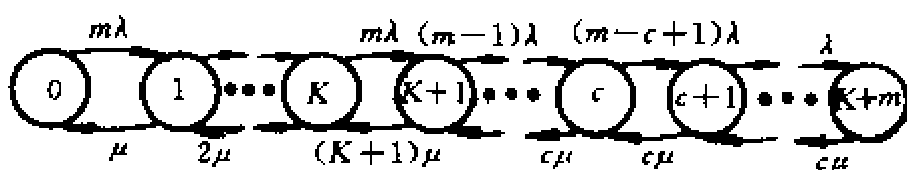


图 3.4

参数为

$$
\lambda_i=\begin{cases} m\lambda, i=0,1,\cdots,K-1 \\ (m-i+K)\lambda, i=K,\cdots,m+K-1 \end{cases}; \quad \mu_i=\begin{cases} i\mu, i=1,\cdots,c-1 \\ c\mu, i=c,\cdots,m+K \end{cases} \tag{5}
$$

定理 2 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j=0,1,2,\cdots,K+m$，则$\{p_j, 0\leqslant j\leqslant m+K\}$存在，且

$$
p_j=\begin{cases} \dfrac{m^j}{j!}\rho^j p_0, & j=0,1,\cdots,K-1 \\ \dfrac{m^K\cdot m!}{j!(m-j+K)!}\rho^j p_0, & j=K,\cdots,c-1 \\ \dfrac{m^K\cdot m!}{c!(m-j+K)!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,\cdots,m+K \end{cases} \tag{6}
$$

其中，

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, p_0 = [\sum_{i=0}^{K-1} \frac{m^i}{i!}\rho^i + \sum_{i=K}^{c-1} \frac{m^K \cdot m!}{i!(m-i+K)!}\rho^i + \frac{m^K \cdot m!}{c!}\sum_{i=c}^{m+K} \frac{\rho^i}{c^{i-c}(m-i+K)!}]^{-1}$$

证明 由生灭过程的极限定理易证.



注意,在 $c \leqslant K$ 的情况下,若 c 固定,当 K 充分大时,可近似地看成无限总体的系统,具有到达率为 $m\lambda$,这时可用 $M/M/c/\infty$ 型系统的有关结果作近似计算反而简单,因为当 $K \to \infty$ 时,若 $\frac{m\lambda}{\mu} < 1$,则可化为 $M/M/c/\infty$ 系统的有关结果;当 $c > K$ 时,若 $K=0$(即无备用机器),则可化为 $M/M/c/m/m$ 系统的有关结果.

例 某航空公司要保证正常的运营,应保证同时有 12 台发动机处于良好状态的概率不低于 0.995,设每台发动机正常运转时间服从负指数分布,平均连续运转时间为 3 个月,有两个维修工负责其修理工作,修理时间亦服从负指数分布,平均修复时间为 5 天,问在满足要求的前提下,应该备用多少台发动机?

解 由题设有 $m=12$ 台,$c=2$ 个,$\lambda=\frac{1}{3}$ 台/月,$\mu=6$ 台/月,要保证使得同时有 12 台发动机处于良好状态的概率不低于 0.995,则等价于故障的发动机数不超过备用发动机数的概率不低于 0.995,于是

1)当备用机器 $K=2(\leqslant c)$时,有

$$\sum_{j=0}^{2} p_j = 0.9474 < 0.995$$

2)当备用机器数 $K=3(>c)$时,有

$$\sum_{j=0}^{3} p_j = 0.9968 > 0.995$$

所以,应取备用发动机台数 $K=3$.

§4 二阶段循环排队系统

1. 问题的叙述

循环排队系统在生产与运输方面有着广泛的应用，例如运输车辆在仓库与生产厂之间运输货物，轮番作业的机械等都属于这种情况. 在本节中我们研究一种较为简单的二阶段循环排队系统. 假定有 n 部卡车担任运输任务，在生产厂与仓库(或车站、码头等)之间来回运输. 把生产厂叫做Ⅰ号服务台，仓库叫做Ⅱ号服务台，把从Ⅱ号到Ⅰ号台之间的路途时间及在Ⅱ号台的实际服务时间之和看作"Ⅱ号台的服务时间"；把从Ⅰ号台到Ⅱ号台之间的路途时间及在Ⅰ号台的实际服务时间之和看作"Ⅰ号台的服务时间". 设这样两个服务台的服务时间分别服从参数 μ_1、μ_2 的负指数分布，工作相互独立. n 部卡车在Ⅰ、Ⅱ号台之间轮番排队，若在Ⅰ号台的车辆(包括正在接受服务的)为 i 辆，则在Ⅱ号台的车辆为 $n-i$ 辆，于是可用 $(i,n-i)$ 表示系统所处的状态. 由于两阶段的循环排队系统的状态完全由Ⅰ号台的状态决定，因此，下面我们仅研究Ⅰ号台的情况.

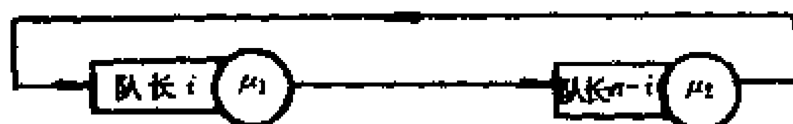


图 3.5　二阶段循环排队模型

2. Ⅰ号台的队长

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 在Ⅰ号台的车辆数，包括正在接受服务的车辆，令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|_{N(t)=i}\}$$

则

1) $p_{ij}(\Delta t)$

$=P\{\Delta t$ 内 Ⅰ 号台服务完 1 个，Ⅱ 号台一个也没有服务完$\}$

$+\sum_{k=2}P\{\Delta t$ 内 Ⅰ 号台服务完 k 个，Ⅱ 号台服务完 $k-1\}$

$=\mu_1\Delta t+o(\Delta t),\quad j=i-1,i=1,2,\cdots,n-1$ (1)

$p_{n,n-1}(\Delta t)=P\{\Delta t$ 内 Ⅰ 号台服务完 1 个$\}$

$+\sum_{k=2}P\{\Delta t$ 内 Ⅰ 号台服务完 k 个，

Ⅱ 号台服务完 $k-1\}$

$=\mu_1\Delta t+o(\Delta t)$ (2)

2) $p_{ij}(\Delta t)$

$=P\{\Delta t$ 内 Ⅱ 号台服务完 1 个，Ⅰ 号台一个也没有服务完$\}$

$+\sum_{k=2}P\{\Delta t$ 内 Ⅱ 号台服务完 k 个，Ⅰ 号台服务完 $k-1\}$

$=\mu_2\Delta t+o(\Delta t),\quad j=i+1,i=1,2,\cdots,n-1$ (3)

$p_{01}(\Delta t)=P\{\Delta t$ 内 Ⅱ 号台服务完 1 个$\}$

$+\sum_{k=2}P\{\Delta t$ 内 Ⅱ 号台服务完 k 个，

Ⅰ 号台服务完 $k-1\}$

$=\mu_2\Delta t+o(\Delta t)$ (4)

3) $p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\quad |i-j|\geqslant 2$ (5)

于是$\{N(t),t\geqslant 0\}$是状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,n\}$上的生灭过程，其状态转移强度图如图 3.6 所示．

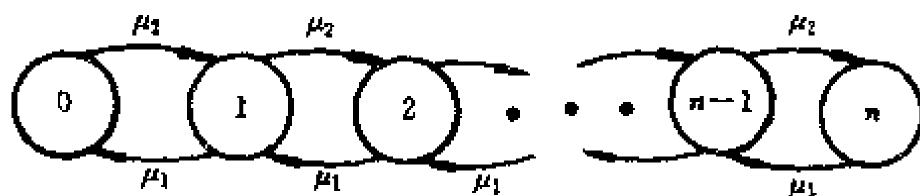


图 3.6

参数为 $\lambda_i=\mu_2, i=0,1,\cdots,n-1$； $\mu_i=\mu_1, i=1,2,\cdots,n$.

定理 1 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j=0,1,2,\cdots,n$，则 $\{p_j, 0\leqslant j\leqslant n\}$ 存在，而且

$$p_j=\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^j p_0, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

其中，$p_0=\left[1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right]\Big/\left[1-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}\right]$. 特别地，当 $\mu_1=\mu_2$ 时，有

$$p_j=\frac{1}{n+1}, \quad j=0,1,2,\cdots,n \tag{7}$$

证明 由生灭过程的极限定理易证.

根据式(6)与式(7)，很容易求得如下指标：

在 I 号台的平均队长为

$$\overline{N}=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \mu_1=\mu_2\\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{1-\frac{\mu_2}{\mu_1}}-\dfrac{(n+1)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}, & \mu_1\neq\mu_2\end{cases} \tag{8}$$

在 I 号台的平均等待队长为

$$\overline{N}_q=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2(n+1)}, & \mu_1=\mu_2\\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{1-\frac{\mu_2}{\mu_1}}-\dfrac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)+n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}, & \mu_1\neq\mu_2\end{cases} \tag{9}$$

3. 车辆在 I 号台的等待时间

设车辆按先到先服务的规则进行服务，且令 p_j^- 表示到达 I 号

台的车辆看到Ⅰ号台已有 j 辆车的平稳概率,则

$$p_j^- = P\{\text{Ⅰ 号台恰已有 } j \text{ 辆}|_{\text{新车进入}}\}$$

$$= \frac{P\{\text{Ⅰ 号台已有 } j \text{ 辆}\} \cdot P\{\text{新车进入}|_{\text{Ⅰ号台已有}j\text{辆}}\}}{P\{\text{新车进入}\}}$$

$$= \frac{p_j}{1 - p_n}, \quad j = 0,1,2,\cdots,n-1 \tag{10}$$

于是在统计平衡下,车辆在Ⅰ号台的等待时间分布函数 $W_q(t)$ 为

$$W_q(t) = \begin{cases} p_0^-, & t = 0 \\ p_0^- + \sum_{j=1}^{n-1} p_j^- \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\mu_1 t)^i}{i!} e^{-\mu_1 t}, & t > 0 \end{cases} \tag{11}$$

平均等待时间为

$$\overline{W}_q = \sum_{j=0}^{n-1} E[W_q|_{\text{到达时已有}j\text{辆}}] \cdot p_j^-$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{\mu_1} \cdot p_j^-$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{2\mu_1}, & \mu_1 = \mu_2 \\ \dfrac{\frac{\mu_2}{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} - \dfrac{n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n}{\mu_1\left[1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n\right]}, & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \tag{12}$$

注意,由于系统队长等于在Ⅰ号台的队长加上在Ⅱ号台的队长,所以当在Ⅰ号台的队长为 i 时,在Ⅱ号台的队长必为 $n-i$,于是可以类似讨论车辆在Ⅱ号台的有关情况,也可以根据在Ⅰ号台的有关结果类推得到在Ⅱ号台的相应结果.

第四章　一般服务的 $M/G/1/\infty$ 排队系统

前面内容着重讨论了按 Poisson 流到达与负指数服务时间的简单排队系统，它的主要特点是在任何时刻系统都具有较好的马尔柯夫性质，能比较容易地得到队长分布的平稳解，因此这部分内容相对讲可以看作是初等的．对于一般服务或一般到达的排队系统，并不是在任何时刻系统都具有马尔柯夫性质，只是在某些特殊的随机时刻系统才具有这种性质，我们称这种随机时刻点为**再生点**，即从这个时刻起，系统好像又重新开始一样．利用再生点，一般服务或一般到达的排队系统可化成马尔柯夫链，用马尔柯夫链的方法来解决，这种方法叫做**嵌入马尔柯夫链法**．本章中先讨论一般服务的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，而且介绍一种直接讨论队长分布的思想和方法．

§1　嵌入马尔柯夫链

1．问题的叙述

所谓 $M/G/1/\infty$ 排队系统是指顾客按参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流到达，即相邻到达的间隔时间序列 $\{\tau_i, i\geqslant 1\}$ 独立、同负指数分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t}, t\geqslant 0$；顾客所需的服务时间序列 $\{\chi_i, i\geqslant 1\}$ 独立、同一般分布 $G(t), t\geqslant 0$，记平均服务时间为 $0<1/\mu=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)$．系统中只有一个服务台，容量为无穷大．顾客到达时．若服务台空闲就立即接受服务，否则就排队等待，并按先到先服务的顺序接受服务，服务完毕后就离开系统，而且仍假定到达与服务是彼此独立的．

2．嵌入马尔柯夫链

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数（队长），对于 $M/G/1/\infty$

排队系统，由于服务时间是一般分布，对任选的一个时刻 t，正在接受服务的顾客可能还没有服务完. 从时刻 t 起的剩余服务时间分布不再具有无记忆性质，于是队长过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 不再具有马尔柯夫性质. 但是，若令 N_n^+ 表示第 n 个顾客服务完毕离开时留在系统中的顾客数，即留下的队长，$n\geqslant 1$，则下面定理表明 $\{N_n^+,n\geqslant 1\}$ 是马尔柯夫链，被称为队长过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的嵌入马尔柯夫链.

定理 1 $\{N_n,n\geqslant 1\}$ 为一不可约、非周期的齐次马尔柯夫链，其一步转移概率为

$$p_{ik}(1)=P\{N_{n+1}^+=k|_{N_n^+=i}\}$$

$$=\begin{cases}\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}dG(t), & i=0\\ \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-i+1}}{(k-i+1)!}e^{-\lambda t}dG(t), & k\geqslant i-1,i\geqslant 1\\ 0, & k<i-1,i\geqslant 1\end{cases} \tag{1}$$

证明 设 υ_n 表示在第 n 个顾客的服务时间 χ_n 内到达的顾客数，则容易看出 $\{\upsilon_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立同分布

$$a_k=P\{\upsilon_n=k\}=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}dG(t),\quad k\geqslant 0 \tag{2}$$

而且

$$N_{n+1}^+=\begin{cases}N_n^+-1+\upsilon_{n+1}, & 若\ N_n^+>0\\ \upsilon_{n+1}, & 若\ N_n^+=0\end{cases},n\geqslant 1 \tag{3}$$

由于 $\{\upsilon_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立、同分布，所以令 $\upsilon_n=\upsilon,n\geqslant 1$，有

$$N_{n+1}^+=\begin{cases}N_n^+-1+\upsilon, & 若\ N_n^+>0\\ \upsilon, & 若\ N_n^+=0\end{cases},n\geqslant 1 \tag{4}$$

从式(4)看到，当已知 N_n^+ 时，N_{n+1}^+ 只与到达过程有关，而与 $N_1^+,N_2^+,\cdots,N_{n-1}^+$ 无关，所以 $\{N_n^+,n\geqslant 1\}$ 是马尔柯夫链，其状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$.

又一步转移概率为

$$p_{ik}(1)=P\{N_{n+1}^+=k|_{N_n^+=i}\}$$

$$
=\begin{cases} P\{v=k-i+1\}, & \text{当 } i \geqslant 1 \\ P\{v=k\}, & \text{当 } i=0 \end{cases} \tag{5}
$$

当 $i \geqslant 1$,时,

$$
P\{v=k-i+1\}=\begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} e^{-\lambda t} dG(t), & j \geqslant i-1 \\ 0, & j<i-1 \end{cases} \tag{6}
$$

当 $i=0$ 时,

$$
P\{v=k\}=\int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t) \tag{7}
$$

所以式(1)成立.

从一步转移概率表达式容易看出,$p_{ik}(1)$,i、$k=0,1,2,\cdots$,与时间的起点无关,而且任意两个状态是互通的,$p_{ii}(1)>0$,故$\{N_n^+,n\geqslant 1\}$为一不可约、非周期的齐次马尔柯夫链. 至此定理 1 证毕.

嵌入马尔柯夫链$\{N_n^+,n\geqslant 1\}$的一步转移概率矩阵可写出如下:

$$
\mathbf{P}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{8}
$$

其中,

$$
a_k=\int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t), \quad k=0,1,2,\cdots
$$

下面我们不加证明地给出马尔柯夫链状态分类判别法的下列引理,在这引理中,假定马尔柯夫链为不可约非周期的.

引理 1[81] 令$\{p_{ij}(1),i,j=0,1,2,\cdots\}$为一步转移概率,若不等

式组

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(1) y_j \leqslant y_i - 1 \quad , \quad i \neq 0$$

存在一个满足条件

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(1) y_j < \infty$$

的非负解，则此马尔柯夫链为正常返.

定理 2 嵌入马尔柯夫链$\{N_n^+, n \geqslant 1\}$为正常返的充分必要条件是$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

证明 充分性. 设$\rho<1$，定义

$$y_j = \frac{j}{1-\rho} \geqslant 0, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{9}$$

则

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(1) y_j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \frac{j}{1-\rho}$$

$$= \frac{i}{1-\rho} = y_i - 1, \quad i \geqslant 1$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j} y_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{j}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

即$\{y_j, j \geqslant 0\}$满足引理 1 的条件，因此嵌入马尔柯夫链$\{N_n^+, n \geqslant 1\}$为正常返.

必要性. 设嵌入马尔柯夫链$\{N_n^+, n \geqslant 1\}$为正常返，则由第一章§1 中定理 2 知.

$$\lim_{n \to \infty} P\{N_n^+ = j\} = p_j^+ > 0, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

存在，且$\{p_j^+, j \geqslant 0\}$是$\{N_n^+, n \geqslant 1\}$惟一的平稳分布，满足式子

$$p_j^+ = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^+ \cdot p_{ij}(1), \quad j \geqslant 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ = 1 \tag{10}$$

根据一步转移概率矩阵，进一步有

$$p_j^+ = p_0^+ a_j + \sum_{i=1}^{j+1} p_i^+ a_{j-i+1}, \quad j \geqslant 0 \tag{11}$$

引入母函数

$$P^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ z^j, \quad \widetilde{A}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad |z| < 1 \tag{12}$$

这样，用 z^j 乘式(11)的两端，然后对 j 从 0 到∞求和，得

$$P^+(z) = p_0^+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} p_i^+ a_{j-i+1} z^j$$
$$= p_0^+ \widetilde{A}(z) + \frac{1}{z}\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i^+ z^i\right)\left(\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} z^{j-i+1}\right)$$
$$= p_0^+ \widetilde{A}(z) + \frac{1}{z}[P^+(z) - p_0^+]\widetilde{A}(z)$$

于是

$$P^+(z) = \frac{p_0^+(1-z)\widetilde{A}(z)}{\widetilde{A}(z) - z} \tag{13}$$

由于 $P^+(1) = \widetilde{A}(1) = 1$，用洛必塔法则，得

$$1 = \lim_{z \to 1^-} P^+(z) = \lim_{z \to 1^-} \frac{-\widetilde{A}(z) p_0^+ + p_0^+(1-z)\widetilde{A}'(z)}{\widetilde{A}'(z) - 1}$$
$$= -\frac{p_0^+}{\widetilde{A}'(1) - 1} \tag{14}$$

又

$$\widetilde{A}'(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j = \rho \tag{15}$$

所以

$$1 = -\frac{p_0^+}{\rho - 1} \tag{16}$$

即 $\rho=1-p_0^+<1$. 至此定理 2 证毕.

推论 1 对于嵌入马尔柯夫链 $\{N_n^+, n\geqslant 1\}$,

1) 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}\geqslant 1$ 时, 此马尔柯夫链是零常返或非常返, n 步转移概率的极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0, \quad i、j = 0,1,,2,\cdots \tag{17}$$

且不存在平稳分布.

2) 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 时, 此马尔柯夫链是正常返, n 步转移概率的极限存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \lim_{n\to\infty} P\{N_n^+ = j\} = p_j^+ > 0$$

进一步 $\{p_j^+, j\geqslant 0\}$ 为惟一的平稳分布, 有递推表达式

$$\begin{cases} p_0^+ = 1-\rho \\ p_j^+ = \dfrac{1}{a_0}\{p_{j-1}^+ - p_0^+ a_{j-1} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} p_k^+ a_{j-k}\}, \quad j\geqslant 1 \end{cases} \tag{18}$$

其中当 $k\leqslant 0$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{k}=0$; $a_j=\int_0^\infty \dfrac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t), j\geqslant 0$.

证明 由第一章 § 5 中定理 2 及上面定理 2 与式(11)易证.

推论 2 对任意正整数 m, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{N_n^+\leqslant m\} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m} p_j^+, & \rho<1 \\ 0, & \rho\geqslant 1 \end{cases} \tag{19}$$

证明 $P\{N_n^+\leqslant m\} = \sum\limits_{j=0}^{m} P\{N_n^+ = j\}$

$$= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{\infty} P\{N(0)=i\}\cdot p_{ij}(n)$$

其中 $N(0)$ 表示初始时刻 $t=0$ 时系统中的顾客数. 令 $n\to\infty$, 由推论

1 得所需结论.

由上面的推论表明，当 $\rho<1$ 时，嵌入马尔柯夫链的 n 步转移概率的极限总存在、为正，不依赖于初始状态，即为平稳分布；当 $\rho\geqslant 1$ 时，不论怎样大的正整数 m，第 n 个顾客服务完毕离开系统时留在系统中的顾客数 $\leqslant m$ 的概率总趋于 $0(n\to\infty)$，这说明队长将越来越长，系统达不到统计平衡. 另外也可证明：若 $\rho=1$，则 $\{N_n^+,n\geqslant 1\}$ 为零常返；若 $\rho>1$，则 $\{N_n^+,n\geqslant 1\}$ 为非常返，两者的区别在于：当 $\rho=1$ 时，系统始终不空的概率为 0，当 $\rho>1$ 时，系统始终不空的概率为正（见参考文献[9]）.

推论 3 对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，若 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，则平稳分布 $\{p_j^+,j\geqslant 0\}$ 的母函数为

$$P^+(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z},\quad |z|<1 \tag{20}$$

其中 $g(\lambda(1-z))=\int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t}dG(t)$.

§2 队 长

在本章§1 中我们研究了队长过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的嵌入过程 $\{N_n^+,n\geqslant 1\}$. 本来，我们也可以通过嵌入过程 $\{N_n^+,n\geqslant 1\}$ 的平稳分布来求得队长 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的平稳分布（见参考文献[9]或[12]），但在本节中我们将向读者介绍另一种独特的研究思想和方法，这种思想是先讨论系统的忙期分布，以及在忙期中队长的变化情况.

对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，令 b 表示从一个顾客开始的系统忙期，且设

$$B(t)=P\{b\leqslant t\},\quad t\geqslant 0;\quad b(s)=\int_0^\infty e^{-st}dB(t)$$

于是，我们可以先讨论系统的忙期分布，$B(t)$ 与 $b(s)$ 也可由本章§4 的内容给出.

下面我们在已知 $B(t)$ 与 $b(s)$ 的前提下，利用队长过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 在忙期中的特性来研究队长分布的瞬态解和稳态解. 令

$$Q_j(t)=P\{b>t\geqslant 0;N(t)=j\},\quad j\geqslant 1 \tag{1}$$

表示在忙期 b 中系统的瞬时队长，且在 $t=0$ 时只有一个顾客，忙期 b 刚开始，即

$$Q_1(0)=1,\quad Q_j(0)=0,\quad j>1 \tag{2}$$

定理 1 令 $q_j^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}Q_j(t)dt$ 为 $Q_j(t)$ 的拉普拉斯变换，则对 $\mathscr{R}(s)>0$，和 $j\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}q_j^*(s)=&\frac{b(s)}{g(s+\lambda)}\int_0^\infty e^{-st}\Delta_{j-1}(t)dt\\&+\frac{1}{g(s+\lambda)}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_{j-k}^*(s)}{b^k(s)}\Big\{b(s)-\sum_{i=0}^{k}\\&\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda b(s)t]^i}{i!}dG(t)\Big\}\end{aligned} \tag{3}$$

其中. $\Delta_j(t)=\overline{G}(t)\dfrac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t},j\geqslant 0$；　当 $i\leqslant 0$ 时，$\sum_{k=1}^{i}=0$；

$g(s+\lambda)=\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}dG(t)$.

证明 设 υ 表示在忙期 b 中第一个顾客的服务时间 χ 内到达的顾客数，显然有

$$P\{\upsilon=i\}=\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}dG(t),\quad i\geqslant 0 \tag{4}$$

称在服务时间 χ 内到达的顾客为“**第一类顾客**”，在其后到达的顾客为“**第二类顾客**”. 由于忙期长度与系统中的顾客数和服务顺序无关，所以，我们可以重新安排服务顺序如下：

设在 χ 内到达的“第一类顾客”分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_\upsilon$. 在服务完第一个顾客后，就服务 A_1 顾客并接着服务除 $A_2,A_3\cdots,A_\upsilon$ 外所有新到的“第二类顾客”，直到没有新到的“第二类顾客”时开始服务 A_2

然后等服务完 A_2 后，又接着服务除 $A_3,A_4,\cdots,A_v$ 外所有新到的“第二类顾客”，直到没有新到的“第二类顾客”时开始服务 A_3，记这段时间为 L_2，… 如此下去，直到最后开始服务 A_v 顾客及其后新到的所有“第二类顾客”，记这段时间为 L_v，于是

$$b = \chi + L_1 + L_2 + \cdots + L_v$$

而且易知 $L_1,L_2,\cdots,L_v$ 相互独立，与 b 同分布 $B(t)$，并独立于 χ 与 v，且当 $v=0$ 时，$L_1+L_2+\cdots+L_v=0$. 于是

$$\begin{aligned}
Q_j(t) &= P\{\chi + L_1 + \cdots + L_v > t \geqslant 0; N(t) = j\} \\
&= P\{\chi > t \geqslant 0; N(t) = j\} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t \frac{(\lambda x)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot \\
&\qquad\qquad P\{L_1 + \cdots + L_i > t - x; N(t-x) = j\}\mathrm{d}G(x) \\
&= \overline{G}(t)\,\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \frac{(\lambda x)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda x} P\{L_1 + \cdots + L_i > t - x; N(t-x) = j\}\mathrm{d}G(x),
\end{aligned}$$

$$j \geqslant 1 \quad (5)$$

根据服务顺序的安排，无论时刻 $t-x$ 落入哪个区间 $L_k(1\leqslant k\leqslant i)$ 内，都有在此时刻系统的顾客数等于“第一类顾客数”加上“第二类顾客数”，而且 L_k 与忙期 b 有相同的概率特性，所以

$$\begin{aligned}
&P\{L_1 + \cdots + L_i > t - x, N(t-x) = j\} \\
&= \sum_{k=1}^{i} P\{L_1 + \cdots + L_k > t - x; \\
&\qquad\qquad L_1 + \cdots + L_{k-1} \leqslant t - x; N(t-x) = j - (i-k)\} \\
&= \sum_{k=1}^{i} Q_{j-(i-k)}(t-x) * B^{(k-1)}(t-x), \quad i \geqslant 1
\end{aligned} \qquad (6)$$

其中，当 $j\leqslant 0$ 时，$Q_j(t)=0$； “$*$”号表示卷积运算. 于是

$$\begin{aligned}
Q_j(t) &= \Delta_{j-1}(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \frac{(\lambda x)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{k=1}^{i} Q_{j-(i-k)}(t-x) * B^{(k-1)}(t-x)\mathrm{d}G(x)
\end{aligned}$$

$$j \geqslant 1 \tag{7}$$

对 $\mathscr{R}(s)>0$,上式的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}
q_j^*(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\Delta_{j-1}(t)dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i q_{j-i+k}^*(s) b^{k-1}(s) \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dG(t) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\Delta_{j-1}(t)dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^\infty b^{k-1}(s) \sum_{i=k}^{j+k-1} q_{j-i+k}^*(s) \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dG(t) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\Delta_{j-1}(t)dt \\
&\quad + \frac{q_j^*(s)}{b(s)}\{g(s+\lambda-\lambda b(s)) - g(s+\lambda)\} \\
&\quad + \frac{q_{j-1}^*(s)}{b^2(s)}\Big\{g(s+\lambda-\lambda b(s)) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{1}\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda b(s)t]^i}{i!}dG(t)\Big\} \\
&\quad + \cdots + \frac{q_1^*(s)}{b^j(s)}\Big\{g(s+\lambda-\lambda b(s)) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{j-1}\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda b(s)t]^i}{i!}dG(t)\Big\}, \quad j \geqslant 1
\end{aligned} \tag{8}$$

并注意到本章§4中定理1,有 $b(s)=g(s+\lambda-\lambda b(s))$. 于是定理1证毕.

▩

对 $t\geqslant 0$,令

$$p_{ij}(t) = P\{N(t) = j|_{N(0)=i}\}$$

$$p_{ij}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}p_{ij}(t)dt, \quad i、j \geqslant 0$$

定理 2 对 $\mathscr{R}(s)>0, i\geqslant 0, j\geqslant 1$,有

$$p_{i0}^*(s)=\frac{b^i(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)} \tag{9}$$

$$p_{ij}^*(s)=\sum_{k=1}^{i}q_{j-i+k}^*(s)b^{k-1}(s)+\frac{\lambda q_j^*(s)b^i(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)} \tag{10}$$

其中,当 $i\leqslant 0$ 时,$\sum_{k=1}^{i}=0$,$q_j^*(s)$ 出定理 1 给出;$b(s)$ 由本章 § 4 中定理 1 确定.

证明 设 $\hat{\tau}_j$ 与 b_j 分别表示从初始状态 $N(0)=0$ 出发,系统的第 j 个闲期与忙期长度,$j\geqslant 1$. 由于到达是参数 λ 的 Poisson 流,所以 $\hat{\tau}_j$ 服从参数 λ 的负指数分布,而且从任意初始状态出发,顾客离开后瞬时队长为 $n(n\geqslant 0)$ 的那些时刻构成一个更新过程的更新时刻,于是 $\{\hat{\tau}_j, j\geqslant 1\}$ 与 $\{b_j, j\geqslant 1\}$ 相互独立,且各自为一个独立过程.

显然,在时刻 t 系统的队长等于零的充要条件是时刻 t 处于系统的闲期,所以

$$\begin{aligned}p_{00}(t)&=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\sum_{j=1}^{k-1}(\hat{\tau}_j+b_j)\leqslant t<\sum_{j=1}^{k-1}(\hat{\tau}_j+b_j)+\hat{\tau}_k\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t[1-F(t-x)]\mathrm{d}[F^{(k-1)}*B^{(k-1)}(x)]\end{aligned} \tag{11}$$

$$p_{i0}(t)=\int_0^t p_{00}(t-x)\mathrm{d}P\{b^{(i)}\leqslant x\},\quad i\geqslant 1 \tag{12}$$

其中 $b^{(i)}$ 表示有 i 个顾客开始的忙期长度. 由于到达是 Poisson 流,所以类似前面服务顺序的安排,$b^{(i)}$ 可表示为

$$b^{(i)}=b_1+b_2+\cdots+b_i,\quad i\geqslant 1 \tag{13}$$

而且 $b_1,b_2,\cdots,b_i$ 相互独立,有相同分布 $B(t)$,所以

$$P\{b^{(i)}\leqslant t\}=B^{(i)}(t),\quad i\geqslant 1, t\geqslant 0 \tag{14}$$

然后取拉普拉斯变换,经过整理即得式(9).

同理,当 $j\geqslant 1$ 时,有

$$p_{ij}(t)=P\{\text{时刻 } t \text{ 处于忙期}; N(t)=j|_{N(0)=i}\},\quad i\geqslant 0 \tag{15}$$

于是，当 $i=0$ 时，

$$p_{0j}(t)=\sum_{m=1}^{\infty}P\{\sum_{k=1}^{m-1}(\hat{\tau}_k+b_k)+\hat{\tau}_m\leqslant t<\sum_{k=1}^{m}(\hat{\tau}_k+b_k);N(t)=j\}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t P\{b_m>t-x;N(t-x)=j\}\mathrm{d}[F^{(m)}*B^{(m-1)}(x)]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t Q_j(t-x)\mathrm{d}[F^{(m)}*B^{(m-1)}(x)],\quad j\geqslant 1 \tag{16}$$

当 $i\geqslant 1$ 时，

$$p_{ij}(t)=P\{b^{(i)}>t\geqslant 0;N(t)=j\}+\int_0^t p_{0j}(t-x)\mathrm{d}B^{(i)}(x) \tag{17}$$

类似 $Q_j(t)$ 的讨论，有

$$P\{b^{(i)}>t\geqslant 0,N(t)=j\}=\sum_{k=1}^{i}Q_{j-(i-k)}(t)*B^{(k-1)}(t) \tag{18}$$

于是

$$p_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{i}Q_{j-(i-k)}(t)*B^{(k-1)}(t)+\int_0^t p_{0j}(t-x)\mathrm{d}B^{(i)}(x) \tag{19}$$

然后取拉普拉斯变换，经过整理即得式(10). 至此定理 2 证毕. ▩

定理 3 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\},j\geqslant 0$，则对任意初始状态，有

1) 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}\geqslant 1$ 时，$p_j=0,j=0,1,2,\cdots$

2) 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 时，$\{p_j,j\geqslant 0\}$ 存在，且构成概率分布，进一步有如下递推式：

$$p_0=1-\rho \tag{20}$$

$$p_j=\frac{1}{a_0}\left\{\lambda(1-\rho)\int_0^{\infty}\overline{G}(t)\,\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{j-1} p_{j-k}\left[1-\sum_{i=0}^{k} a_i\right]\Bigg\} \quad , \quad j>1 \tag{21}$$

其中当 $j\leqslant 0$ 时，有 $\sum_{k=1}^{j}=0$；

$$a_i=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dG(t), \quad i=0,1,2,\cdots$$

证明 由全概率公式和控制收敛定理，得

$$p_j=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}(t)\cdot P\{N(0)=i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} P\{N(0)=i\}\cdot\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t), \quad j\geqslant 0 \tag{22}$$

又

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim_{t\to\infty}\int_0^t dp_{ij}(x)+p_{ij}(0)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\lim_{s\to 0^+}\int_0^t e^{-sx}dp_{ij}(x)+p_{ij}(0)$$

$$=\lim_{s\to 0^+}\int_0^{\infty} e^{-sx}dp_{ij}(x)+p_{ij}(0)$$

$$=\lim_{s\to 0^+} s p_{ij}^*(s) \tag{23}$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} p_{i0}(t)=\lim_{s\to 0^+}\frac{sb^i(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)}, \quad i\geqslant 0 \tag{24}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim_{s\to 0^+}\frac{s\lambda q_j^*(s)b^i(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)}$$

$$=\lim_{s\to 0^+}[\lambda q_j^*(s)]\lim_{s\to 0^+}\frac{sb^i(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)},$$

$$i\geqslant 0, j\geqslant 1 \tag{25}$$

使用洛必塔法则，并注意到（本章§4）

$$\lim_{s\to 0^+} b(s) = \begin{cases} 1, & \rho \leqslant 1 \\ \omega < 1, & \rho > 1 \end{cases}$$

$$E[b] = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu - \lambda}, & \rho < 1 \\ \infty, & \rho \geqslant 1 \end{cases}$$

得

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{sb'(s)}{s + \lambda - \lambda b(s)} = \begin{cases} 1 - \rho, & \rho < 1 \\ 0, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{26}$$

由本节定理 1 知，$\lim\limits_{s\to 0^+} \lambda q_j^*(s)$存在，且当 $\rho \geqslant 1$ 时 $q_j^*(0)$为一个有限数；当 $\rho<1$ 时，有递推式：

$$q_j^*(0) = \frac{1}{a_0}\int_0^\infty \overline{G}(t)\,\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{j-1} q_{j-k}^*(0)\left[1 - \sum_{i=0}^{k} a_i\right], \quad j \geqslant 1 \tag{27}$$

于是

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t), \quad j = 0,1,2,\cdots$$

存在，与初始条件无关，而且当 $\rho<1$ 时，递推式(21)成立.

显然

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j$$

$$= (1-\rho) + \frac{1}{a_0}\left\{\lambda(1-\rho)\int_0^\infty G(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} p_{j-k}\left[1 - \sum_{i=0}^{k} a_i\right]\right\}$$

$$= (1-\rho) + \frac{1}{a_0}\left\{\lambda(1-\rho)\int_0^\infty \overline{G}(t)\mathrm{d}t\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{j-k}\left[1 - \sum_{i=0}^{k} a_i\right]\right\}$$

$$= (1-\rho) + \frac{1}{a_0}\left\{\rho(1-\rho) + \rho\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i\right\}$$

$$=(1-\rho)+\frac{1}{a_0}\left\{\rho(1-\rho)+\rho\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{i-1}a_i\right\}$$

$$=(1-\rho)+\frac{1}{a_0}\left\{\rho(1-\rho)+\rho\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)a_i\right\}$$

$$=(1-\rho)+\frac{1}{a_0}\left\{\rho(1-\rho)+\rho\sum_{i=2}^{\infty}ia_i-\rho(1-a_0-a_1)\right\}$$

$$=(1-\rho)+\frac{1}{a_0}\{\rho(1-\rho)+\rho(\rho-a_1)-\rho(1-a_0-a_1)\}$$

$$=1$$

即$\{p_j,j\geqslant 0\}$构成概率分布. 至此定理 3 证毕.

推论 1 令 $P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j$,则当 $\rho<1$ 时,

1) $$P(z)=P^+(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z},\quad |z|<1 \tag{28}$$

2) $$\overline{N}=\rho+\frac{\lambda^2E[\chi^2]}{2(1-\rho)}$$

$$\overline{N}_q=\frac{\lambda^2E[\chi^2]}{2(1-\rho)} \tag{29}$$

推论 2 在 $M/G/1/\infty$排队系统中,当 $\rho<1$ 时,

$$p_j=p_j^+\quad,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{30}$$

§3 等待时间与逗留时间

假定顾客是按先到先服务的规则进行服务的,并令$W_q(t)$与

$W(t)$分别表示统计平衡下顾客的等待时间分布和逗留时间分布，且它们的拉普拉斯一司梯阶变换为

$$w_q(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dW_q(t),w(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dW(t)$$

定理1 对$M/G/1/\infty$排队系统. 在$\rho<1$下，有

$$1)\ w(s)=\frac{s(1-\rho)g(s)}{s-\lambda[1-g(s)]},\quad \mathscr{R}(s)>0 \tag{1}$$

$$2)\ w_q(s)=\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda[1-g(s)]},\quad \mathscr{R}(s)>0 \tag{2}$$

其中式(2)称为**扑拉克一辛钦公式**；$g(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dG(t)$.

证明 显然，在统计平衡下，顾客服务完毕离开系统时留在系统中的顾客数应等于在该顾客的逗留时间内到达的顾客数，即

$$\begin{aligned}p_j^+&=P\{\text{在该顾客的逗留时间内到达 }j\text{ 个}\}\\&=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dW(t),\quad j=0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{3}$$

于是

$$\begin{aligned}P^+(z)&=\sum_{j=0}^{\infty}z^jp_j=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda tz)^j}{j!}dW(t)\\&=\int_0^{\infty}e^{-\lambda(1-z)t}dW(t)=w(\lambda(1-z))\end{aligned}$$

即

$$\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z}=w(\lambda(1-z)) \tag{4}$$

然后令$s=\lambda(1-z)$即得式(1).

又逗留时间W等于等待时间W_q加上服务时间χ，即$W=W_q+\chi$，且W_q与χ相互独立，所以

$$w(s)=w_q(s)\cdot g(s)$$

即式(2)成立，证毕.



推论 1 令 $\hat{G}(t)=\mu\int_0^t[1-G(x)]\mathrm{d}x$ 表示服务时间分布 $G(t)$ 的平衡分布，则等待时间分布函数 $W_q(t)$ 为

$$W_q(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^n\hat{G}^{(n)}(t),\quad t\geqslant 0 \tag{5}$$

其中 $\hat{G}(n)$ 为 $\hat{G}(t)$ 的 n 重卷积，$n\geqslant 1$，$\hat{G}^{(0)}(t)=1$，$t\geqslant 0$.

证明 令 $\hat{g}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\hat{G}(t)$，则 $\hat{g}(s)=\dfrac{\mu[1-g(s)]}{s}$，$\mathscr{R}(s)>0$，于是

$$w_q(s)=(1-\rho)/[1-\rho\hat{g}(s)] \tag{6}$$

显然，当 $\rho<1$ 时，其模 $|\rho\hat{g}(s)|<1$，于是把 $w_q(s)$ 展开，有

$$w_q(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^n[\hat{g}(s)]^n \tag{7}$$

利用控制收敛定理，逐项求拉普拉斯—司梯阶的反演变换即得式(5).

推论 2 对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在 $\rho<1$ 下，有

$$\overline{W}_q=\frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)},\quad \overline{W}=\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} \tag{8}$$

推论 3 对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在 $\rho<1$ 下，Little 公式成立.

下面看一些特殊排队系统.

1)在 $M/M/1/\infty$ 排队系统中，即 $G(t)=1-e^{-\mu t}$，$t\geqslant 0$，则根据本章 § 2 中定理 3，用归纳法易证，当 $\rho<1$ 时，有

$$p_j=(1-\rho)\rho^j,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{9}$$

2)在 $M/D/1/\infty$ 排队系统中，即服务时间分布为定长 $\dfrac{1}{\mu}$ 的定长分布

$$G(t)=\begin{cases}0, & t<\dfrac{1}{\mu}\\ 1, & t\geqslant\dfrac{1}{\mu}\end{cases}$$

则当 $\rho<1$ 时，有

$$\begin{cases}p_0=1-\rho\\ p_j=(1-\rho)\left[e^{\rho}-\sum\limits_{i=0}^{j-1}\dfrac{\rho^i}{i!}\right]+\sum\limits_{k=1}^{j-1}p_{j-k}\left[e^{\rho}-\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{\rho^i}{i!}\right], \\ \qquad\qquad j\geqslant 1\end{cases} \tag{10}$$

而且

$$\overline{N}=\frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)},\quad \overline{N}_q=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{11}$$

$$\overline{W}=\frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)},\quad \overline{W}_q=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} \tag{12}$$

3）在 $M/H_r/1/\infty$ 排队系统中，即服务时间分布 $G(t)=1-\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i e^{-\mu_i t}$ 为超指数分布，则当 $\rho=\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\rho_i<1$ 时，有

$$\begin{cases}p_0=1-\rho\\ p_j=\left[\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{\alpha_i}{1+\rho_i}\right]^{-1}\left\{(1-\rho)\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\left(\dfrac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)^j\right.\\ \qquad\left.+\sum\limits_{k=1}^{j-1}p_{j-k}\left[\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\left(\dfrac{\rho_i}{1+\rho_i}\right)^{k+1}\right]\right\},\quad j\geqslant 1\end{cases} \tag{13}$$

其中，$\alpha_i>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i=1$；$\mu_i>0$，且 $\rho_i=\dfrac{\lambda}{\mu_i}, i=1,2,\cdots,r$，而且

$$\overline{N}=\rho+\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\rho_i^2}{1-\rho},\quad \overline{N}_q=\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\rho_i^2}{1-\rho} \tag{14}$$

$$\overline{W}=\frac{1}{\mu}+\frac{\sum_{i=1}^{r}a_i\rho_i^2}{\lambda(1-\rho)},\quad \overline{W}_q=\frac{\sum_{i=1}^{r}a_i\rho_i^2}{\lambda(1-\rho)} \tag{15}$$

4）在 $M/E_k/1/\infty$ 排队系统中，即服务时间分布为参数 $k\mu$ 的 k 阶爱尔朗分布 $G(t)=1-e^{-k\mu}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k\mu t)^i}{i!}$，则当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$，有

$$\begin{cases} p_0=1-\rho \\ p_j=(1-\rho)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+j-1}{i}\frac{\tilde{\rho}^i}{(1+\tilde{\rho})^{i+j-k}} \\ \qquad +\sum_{m=1}^{j-1}p_{j-m}\left[(1+\tilde{\rho})^k-\sum_{i=0}^{m}\binom{i+k-1}{i}\left(\frac{\tilde{\rho}}{1+\tilde{\rho}}\right)^i\right], \\ \qquad\qquad j\geqslant 1 \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\tilde{\rho}=\frac{\rho}{k}$；$\binom{i+j}{i}$ 表示 $(i+j)$ 中取 i 的组合数，而且

$$\overline{N}=\rho+\frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)},\quad N_q=\frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)} \tag{17}$$

$$\overline{W}=\frac{1}{\mu-\lambda}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)},W_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)} \tag{18}$$

值得一提的是，对 $M/E_k/1/\infty$ 排队系统，参考文献[12]是采用相位分析法进行讨论的，它的基本原理是把服务分成 k 个独立的阶段（位相），每个阶段的服务时间均为参数 $k\mu$ 的负指数分布，顾客必须连续地接受这 k 个独立阶段的服务，直到最后一个阶段的服务完毕才算服务终止，然后利用负指数分布的无记忆性质. 对于到达间隔时间为 k 阶爱尔朗分布的 $E_k/M/1/\infty$ 排队系统，也可采用位相分析法. 另外，$M/E_k/1/\infty$ 系统与如下的成批到达系统 $M^{[k]}/M/1/$ 是等价的：批量为固定数 k，相继批到达的间隔时间独立、服从相同参数 λ

(>0)的负指数分布，单个服务员，单个服务，每个顾客所需的服务时间相互独立、服从参数为 $k\mu$ 的负指数分布，每批服务完的总时间为参数 $k\mu$ 的 k 阶爱尔朗分布. 如果把 k 个到达看成是一个到达，则到达为参数 λ 的 Poisson 流，而服务时间（k 个服务时间之和）为参数 $k\mu$ 的 k 阶爱尔朗分布，于是可用类似方法研究 $M^{[k]}/M/1/\infty$ 系统，所得平衡结果与 $M/E_k/1/\infty$ 系统是一致的. 同样 $E_k/M/1/\infty$ 系统与成批服务的 $M/M^{[k]}/1/\infty$ 系统也是等价的.

§4 忙　期

在本节讨论之前，我们先给出一个引理，其证明可见参考文献[9]的第 69 页或见参考文献[69]的第 653 页.

引理 1 若

1) $\mathscr{R}(s)\geqslant 0, |u|<1$；或

2) $\mathscr{R}(s)>0, |u|\leqslant 1$；或

3) $\mathscr{R}(s)\geqslant 0, |u|\leqslant 1$，且 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}>1$，

则方程 $z=ug(s+\lambda(1-z))$ 在单位圆 $|z|<1$ 内有惟一解 $r(s,u)$，且 $r(s,u)$ 可表示为

$$r(s,u)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}u^j}{j!}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)x}x^{j-1}dG^{(j)}(x) \tag{1}$$

而且

$$\lim_{u\to 1^-} r(0,u)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \omega<1, & \rho>1\end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{s\to 0^+} r(s,1)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \omega<1, & \rho>1\end{cases} \tag{3}$$

其中，$G^{(j)}(x)$ 为服务时间分布 $G(x)$ 的 j 重卷积，$j\geqslant 1$；$g(s)$ 为 $G(x)$ 的拉普拉斯一司梯阶变换；ω 为方程 $z=g(\lambda(1-z))$ 在 $(0,1)$ 内的最小非负实根.

当某顾客到达空闲的服务台时，忙期就开始，直到服务台又一次得空时忙期才结束. 令 b 表示从一个顾客开始的忙期长度，且令

$$B(t)=P\{b\leqslant t\},\quad b(s)=\int_0^\infty e^{-st}dB(t)$$

定理 1 对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，若 $\mathscr{R}(s)>0$，则 $b(s)$ 为方程

$$z=g(s+\lambda(1-z)) \tag{4}$$

在 $|z|<1$ 内的惟一解，且 $B(t)$ 可表示为

$$B(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}dG^{(j)}(x) \tag{5}$$

若 $\rho\leqslant 1$，则 $B(\infty)=1$，此时 $B(t)$ 为概率分布函数；若 $\rho>1$，则 $B(\infty)=\omega<1$，此时 $B(t)$ 不是概率分布函数，且忙期长度为无穷的概率等于 $1-\omega$.

证明 类似本章§2 中定理 1 的证明过程，忙期 b 可表示为

$$b=\chi+L_1+\cdots+L_v \tag{6}$$

其中，$L_1,L_2,\cdots,L_v$ 相互独立，与 b 有相同分布 $B(t)$. 并独立于 χ 与 v，且当 $v=0$ 时，$L_1+L_2+\cdots+L_v=0$，而 v 表示在 χ 内到达的顾客数，于是

$$\begin{aligned}B(t)&=\int_0^t P\{\chi+L_1+\cdots+L_v\leqslant t|_{\chi=x}\}dG(x)\\&=\int_0^t\sum_{j=0}^{\infty}P\{v=j|_{\chi=x}\}\\&\quad\cdot P\{L_1+\cdots+L_v\leqslant t-x|_{\chi=x,v=j}\}dG(x)\\&=\int_0^t\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x}B^{(j)}(t-x)dG(x)\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$B^{(j)}(x)$ 为 $B(x)$ 的 j 重卷积，$j\geqslant 1$，且 $B^{(0)}(x)=1,x\geqslant 0$. 取拉普拉斯一司梯阶变换，得

$$b(s)=\int_0^\infty\sum_{j=0}^{\infty}[b(s)]^j e^{-(s+\lambda)x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}dG(x)$$

$$=\int_0^\infty e^{-[s+\lambda-\lambda b(s)]x}\mathrm{d}G(x)$$

$$=g(s+\lambda(1-b(s)))\tag{8}$$

也就是说，$z=b(s)$满足方程$z=g(s+\lambda(1-z))$. 但当$\mathscr{R}(s)>0$时，$|b(s)|<1$，由引理1知，在$|z|<1$内方程$z=g(s+\lambda(1-z))$有惟一解$z=b(s)$，且可表示为

$$b(s)=\sum_{j=1}^\infty\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!}\mathrm{d}G^{(j)}(t)\tag{9}$$

反演可得

$$B(t)=\sum_{j=1}^\infty\int_0^t e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}\mathrm{d}G^{(j)}(x),\quad t\geqslant 0\tag{10}$$

又

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{s\to 0^+}b(s)=\lim_{s\to 0^+}r(s,1)\tag{11}$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \omega<1, & \rho>1\end{cases}\tag{12}$$

至此定理1证毕.



例 在$M/M/1/\infty$排队系统中，$G(t)=1-e^{-\mu t}$，故$g(s)=\frac{\mu}{s+\mu}$，此时方程$z=g(s+\lambda(1-z))$化为

$$\lambda z^2-(s+\lambda+\mu)z+\mu=0\tag{13}$$

因而$b(s)$为此方程在$|z|<1$内的惟一解

$$b(s)=\frac{(s+\lambda+\mu)-\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}\tag{14}$$

而且根据前面$B(t)$的表达式，此时有

$$B(t)=\sum_{j=1}^\infty\int_0^t e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}\cdot e^{-\mu x}\frac{\mu(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^t e^{-(\lambda+\mu)x}\sum_{j=1}^\infty\frac{\mu(\lambda\mu x^2)^{j-1}}{j!(j-1)!}\mathrm{d}x\tag{15}$$

其密度函数为

$$B'(t)=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\frac{1}{t}\,e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2\sqrt{\lambda\mu}t) \tag{16}$$

其中 $I_1(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}y)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ 为一阶修正贝塞尔函数. 此结果与前第二章§1用微分方程法解出的结果一致.

上面我们导出了忙期长度的分布,但我们进一步要问:在一个忙期中究竟服务了多少顾客呢? 下面我们就来讨论这个问题. 令

$$D_j(t)=P\{b\leqslant t,\text{且在忙期 } b \text{ 中服务 } j \text{ 个顾客}\},\quad j\geqslant 1$$

定理 2 令 $d_j(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dD_j(t)$, $j\geqslant 1$, 若 $\mathscr{R}(s)>0$, $|u|<1$, 则

$$\sum_{j=1}^{\infty}d_j(s)u^j=r(s,u) \tag{17}$$

其中 $r(s,u)$ 为方程

$$z=ug(s+\lambda(1-z)) \tag{18}$$

在单位圆 $|z|<1$ 内的惟一解. 由此

$$d_j(s)=\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!}dG^{(j)}(t) \tag{19}$$

反演,得

$$D_j(t)=\int_0^{t}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}dG^{(j)}(x),\quad j\geqslant 1 \tag{20}$$

证明 显然,有

$$D_j(t)=P\{\chi+L_1+\cdots+L_v\leqslant t,\varphi_1+\cdots+\varphi_v=j-1\} \tag{21}$$

其中,$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_v$ 分别表示在 $L_1,L_2,\cdots,L_v$ 中服务完的顾客数,有 $\varphi_1,\cdots,\varphi_v$ 独立、同分布,且当 $v=0$ 时,$L_1+\cdots+L_v=0$, $\varphi_1+\cdots+\varphi_v=0$. 于是,当 $j>1$ 时,

$$D_j(t)=\int_0^t P\Big\{\chi+L_1+\cdots+L_v\leqslant t,$$

$$\varphi_1+\cdots+\varphi_v=j-1\,|_{\chi=x}\Big\}\mathrm{d}G(x)$$

$$=\int_0^t\sum_{i=1}^{j-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_i=j-1\\ n_1\cdots n_i\geqslant 1}}$$

$$P\{L_1+\cdots+L_i\leqslant t-x,\varphi_1=n_1,\cdots,\varphi_i=n_i\}\mathrm{d}G(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_i=j-1\\ n_1\cdots n_i\geqslant 1}}\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}D_{n_1}*\cdots*D_{n_i}(t-x)\mathrm{d}G(x)$$

(22)

当 $j=1$ 时，显见有

$$D_1(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}G(x)\tag{23}$$

取拉普拉斯一司梯阶变换，得

$$d_j(s)=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_i=j-1\\ n_1\cdots n_i\geqslant 1}}d_{n_1}(s)\cdots d_{n_i}(s)\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(s+\lambda)x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\mathrm{d}G(x),$$

$$j>1\tag{24}$$

$$d_1(s)=g(s+\lambda)\tag{25}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{\infty}d_j(s)u^j=ug(s+\lambda)+\sum_{j=2}^{\infty}u^j\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_i=j-1\\ n_1\cdots n_i\geqslant 1}}$$

$$d_{n_1}(s)\cdots d_{n_i}(s)\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(s+\lambda)x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\mathrm{d}G(x)$$

$$=ug(s+\lambda)+u\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(s+\lambda)x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\mathrm{d}G(x)$$

$$\cdot \sum_{j=i+1}^{\infty} u^{j-1} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_i=j-1 \\ n_1\cdots n_i \geqslant 1}} d_{n_1}(s)\cdots d_{n_i}(s)$$

$$= ug(s+\lambda) + u\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\Big[\sum_{j=1}^{\infty} d_j(s)u^j\Big]^i dG(x)$$

$$= ug\Big[s+\lambda(1-\sum_{j=1}^{\infty} d_j(s)u^j)\Big], \quad |u|<1 \tag{26}$$

此式表明 $\sum_{j=1}^{\infty} d_j(s)u^j$ 满足方程(18). 但当 $\mathscr{R}(s)>0, |u|<\frac{1}{2}$ 时，$\left|\sum_{j=1}^{\infty} d_j(s)u^j\right|<1$，且由引理 1，方程式(18)在 $|z|<1$ 内有惟一解 $r(s,u)$，因此当 $\mathscr{R}(s)>0, |u|<\frac{1}{2}$ 时，$r(s,u)=\sum_{j=1}^{\infty} d_j(s)u^j$. 但此式两端在 $\mathscr{R}(s)>0, |u|<1$ 均解析，由解析开拓知式(17)成立. 将式(17)与引理 1 的式(1)比较 u^j 的系数即得式(19)，反演即得式(20). 至此定理 2 证毕.

■

推论 1 忙期长度 b 的分布函数为

$$B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!} dG^{(j)}(x) \tag{27}$$

此与定理 1 的结果一致.

推论 2 忙期中服务 j 个顾客的概率为

$$D_j(\infty) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!} dG^{(j)}(x) \tag{28}$$

特别地，当 $G(x)=1-e^{-\mu x}$ 时，有

$$D_j(\infty) = \frac{(2j-2)!\,\mu(\lambda\mu)^{j-1}}{j!(j-1)!(\lambda+\mu)^{2j-1}}, \quad j\geqslant 1 \tag{29}$$

定理 3 对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，忙期 b 的平均长度

$$E[b]=\begin{cases}1/(\mu-\lambda), & \rho<1\\ \infty, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{30}$$

而忙期 b 内被服务完的顾客平均数为

$$E[N_b]=\begin{cases}1/(1-\rho), & \rho<1\\ \infty, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{31}$$

证明

$$\begin{aligned}E[b]&=E[\chi+L_1+\cdots+L_v]\\&=\frac{1}{\mu}+\sum_{j=0}^{\infty}P\{v=j\}\cdot E[L_1+\cdots+L_j]\\&=\frac{1}{\mu}+\sum_{j=0}^{\infty}P\{v=j\}\cdot jE[b]\\&=\frac{1}{\mu}+\rho E[b]\end{aligned}$$

于是得所求证的式(30).

又

$$\begin{aligned}E[N_b]&=\int_0^{\infty}E[N_b|_{b=x}]\mathrm{d}B(x)\\&=\int_0^{\infty}\mu x\mathrm{d}B(x)=\mu E[b]\end{aligned}$$

故由式(30)即得式(31).

§5 输 出 过 程

令 T_n^+ 表示第 n 个顾客服务完毕的离去时刻，则 $T_{n+1}^+-T_n^+$ 表示离去的间隔时间，$n\geqslant1$. 显然，在统计平衡下，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{T_{n+1}^+-T_n^+\leqslant t\}=\begin{cases}(1-\rho)F(t)*G(t)+\rho G(t), & \rho<1\\ G(t), & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{1}$$

而且对 $M/G/1/\infty$ 排队系统，参考文献[69]指出，相继离去的间隔时

间一般是不独立的，即使在统计平衡下也如此.

下面我们讨论在时间$(0,t]$内离去顾客的平均数以及其渐近展开问题. 对$t\geqslant 0$，设

$$A_i(t)=P\{\text{时刻} t \text{ 系统处于忙期}|_{N(0)=i}\},\quad i\geqslant 0$$

引理 1 令$a_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A_i(t)dt, i\geqslant 0, \mathscr{R}(s)>0$，则

$$a_i^*(s)=\frac{1}{s}-\frac{b'(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)} \tag{2}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lim_{s\to 0^+}s\cdot a_i^*(s)=\begin{cases}\rho, & \rho<1\\ 1, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{3}$$

证明 令$\hat{\tau}_j$、b_j分别表示系统从初始状态$N(0)=0$出发时的第j个闲期与忙期长度，则$\{\hat{\tau}_j, j\geqslant 1\}$与$\{b_j, j\geqslant 1\}$构成一个交替更新过程，于是

$$\begin{aligned}A_0(t)&=\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sum_{j=1}^{k-1}(\hat{\tau}_j+b_j)+\hat{\tau}_k\leqslant t<\sum_{j=1}^{k}(\hat{\tau}_j+b_j)\right\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t[1-B(t-x)]d[F^{(k)}*B^{(k-1)}(x)]\end{aligned}$$

对$i\geqslant 1$，类似可得

$$A_i(t)=1-B^{(i)}(t)+\int_0^t A_0(t-x)dB^{(i)}(x)$$

对上式取拉普拉斯变换，并注意到$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，即得式(2).

因为

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}A_i(t)&=\lim_{t\to\infty}\int_0^t dA_i(x)+A_i(0)\\&=\lim_{t\to\infty}\lim_{s\to 0^+}\int_0^t e^{-sx}dA_i(x)+A_i(0)\\&=\lim_{s\to 0^+}\int_0^\infty e^{-sx}dA_i(x)+A_i(0)\\&=\lim_{s\to 0^+}sa_i^*(s)\end{aligned} \tag{4}$$

使用洛必塔法则，并结合

$$\lim_{s\to 0^+} b(s) = \begin{cases} 1, & \rho \leqslant 1 \\ \omega < 1, & \rho > 1 \end{cases}$$

即 可完成引理 1 的证明.

我们用 $M_i(t)$表示系统从初始状态 $N(0)=i$ 出发，在$(0,t]$内服务完的平均顾客数.

定理 1 令 $m_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dM_i(t)$，$\mathscr{R}(s) > 0$，则

$$m_i(s) = \frac{g(s)}{1-g(s)}\left\{1 - \frac{sb'(s)}{s+\lambda-\lambda b(s)}\right\}, \quad i \geqslant 0 \tag{5}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0^+} sm_i(s) = \begin{cases} \lambda, & \rho < 1 \\ \mu, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{6}$$

其中 $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$ ，$b(s)$由本章 § 4 中定理 1 确定.

证明 1) 令

$$H(t) = E\{(0,t] \text{ 中离去的顾客数}; 0 \leqslant t < b\}$$

$$L(t) = E\{(0,b] \text{ 中离去的顾客数}; b \leqslant t\}$$

则

$$H(t) + L(t) = M(t) - \int_0^t M(t-x) dB(x), \quad t \geqslant 0 \tag{7}$$

其中 $M(t)$表示以 $G(t)$为分布函数的更新过程 $\{\chi_n, n \geqslant 1\}$ 的更新函数，由第一章 § 4 知识，得

$$M(t) = \sum_{k=1}^\infty G^{(k)}(t)$$

且

$$m(s) = \int_0^\infty e^{-st} dM(t) = \frac{g(s)}{1-g(s)}, \quad \mathscr{R}(s) > 0 \tag{8}$$

事实上，在忙期 b 中，由于服务时间形成一个更新过程 $\{\chi_n, n \geqslant$

1}，且忙期 b 的结束时刻恰是一个更新结束，于是用忙期 b 对 $M(t)$ 进行全概率分解，有

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E\{(0,t]\text{ 中 }\{\chi_n, n \geqslant 1\}\text{ 的更新次数}\} \\
&= E\{(0,t]\text{ 中 }\{\chi_n, n \geqslant 1\}\text{ 的更新次数}; 0 \leqslant t < b\} \\
&\quad + E\{(0,t]\text{ 中 }\{\chi_n, n \geqslant 1\}\text{ 的更新次数}; b \leqslant t\} \\
&= H(t) + L(t) + E\{(b,t]\text{ 中 }\{\chi_n, n \geqslant 1\}\text{ 的更新次数}; b \leqslant t\} \\
&= H(t) + L(t) + \int_0^t M(t-x)\mathrm{d}B(x)
\end{aligned}
$$

即式(7)成立.

类似地，若令

$$H_i(t) = E\{(0,t]\text{ 中离去的顾客数}; 0 \leqslant t < b^{<i>}\}$$

$$L_i(t) = E\{(0,b^{<i>}]\text{ 中离去的顾客数}; b^{<i>} \leqslant t\}$$

则

$$H_i(t) + L_i(t) = M(t) - \int_0^t M(t-x)\mathrm{d}B^{(i)}(x), \quad i \geqslant 1 \tag{9}$$

其中 $b^{<i>}$ 表示从 i 个顾客开始的忙期长度，$i \geqslant 1$.

2)因为离去仅在忙期中发生，所以对 $i \geqslant 1$，有

$$
\begin{cases}
M_0(t) = \int_0^t M_1(t-x)\mathrm{d}F(x) \\
M_i(t) = \int_0^t M_1(t-x)\mathrm{d}[F * B^{(i)}(x)] + H_i(t) + L_i(t)
\end{cases} \tag{10}
$$

然后取拉普拉斯－司梯阶变换，经整理得式(5).

3)因为 $M_i(t)$ 是时刻 t 的单调不减函数，根据托贝尔定理(见附录中第五)，得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0^+} s m_i(s) \tag{11}$$

再使用洛必塔法则，结合引理 1 即得式(6). 至此定理 1 证毕. ■

定理 2 令 $\hat{M}_i(t) = M_i(t) - (\mu t) * A_i(t)$，若服务时间分布

$G(t)$是非格的，且 $E[\chi^2]<\infty$，则

$$\lim_{t\to\infty}\hat{M}_i(t)=\begin{cases}\rho\left\{\dfrac{\mu^2}{2}E[\chi^2]-1\right\}, & \rho<1\\ \dfrac{\mu^2}{2}E[\chi^2]-1, & \rho\geqslant 1\end{cases}\tag{12}$$

证明 根据上面式(2)、式(5)与式(8)，得

$$M_i(t)=M(t)*A_i(t),\quad i\geqslant 0\tag{13}$$

于是

$$\hat{M}_i(t)=[M(t)-\mu t]*A_i(t),\quad i\geqslant 0\tag{14}$$

对 $\mathscr{R}(s)>0$，有

$$\int_0^\infty e^{-st}d\hat{M}_i(t)=[sa_i^*(s)]\cdot\int_0^\infty e^{-st}d[M(t)-\mu t]\tag{15}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\hat{M}_i(t)&=\lim_{s\to 0^+}\int_0^\infty e^{-st}d\hat{M}_i(t)\\&=\lim_{s\to 0^+}[sa_i^*(s)]\cdot\lim_{s\to 0^+}\int_0^\infty e^{-st}d[M(t)-\mu t]\\&=\lim_{s\to 0^+}[sa_i^*(s)]\cdot\lim_{t\to\infty}[M(t)-\mu t]\end{aligned}\tag{16}$$

再结合第一章§4 中定理 5 及本节引理 1，即完成证明.



上面的讨论思想，使我们更能清楚地了解到离去过程的独特结构：在忙期中嵌入了一个更新过程，而且平均离去的顾客数与该更新过程的更新函数呈现一种卷积关系，而且，当 t 充分大时，可得便于计算 $M_i(t)$的近似式：

$$M_i(t)\approx\begin{cases}\lambda t, & \rho<1\\ \mu t, & \rho\geqslant 1\end{cases}\tag{17}$$

或

$$M_i(t)\approx\begin{cases}\lambda t+\rho\left\{\dfrac{\mu^2}{2}E[\chi^2]-1\right\}, & \rho<1\\ \mu t+\dfrac{\mu^2}{2}E[\chi^2]-1, & \rho\geqslant 1\end{cases}\tag{18}$$

第五章　一般到达的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统

§1　嵌入马尔柯夫链

1. 问题的叙述

所谓 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，是指顾客的到达间隔时间序列 $\{\tau_i, i \geqslant 1\}$ 独立、具有相同的一般分布 $F(t), t \geqslant 0$，记平均到达间隔时间为 $0 < \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)$，$\lambda (> 0)$ 为常数；顾客所需的服务时间序列 $\{\chi_i, i \geqslant 1\}$ 独立、服从参数 $\mu (>0)$ 的负指数分布 $G(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, t \geqslant 0$；系统中有 $c (\geqslant 1)$ 个服务台并行、独立地服务，系统容量为无穷大. 顾客到达时，若有空闲的服务台，他就任选其中之一接受服务；若所有的服务台都正在进行服务，顾客就排成一个队列等待，并按到达的先后顺序逐个接受服务，顾客在服务完毕后就离开系统，同时队首顾客（如果此时有等待顾客的话）立即被有空的服务台接受服务，而且仍假定到达与服务是彼此独立的.

2. 嵌入马尔柯夫链

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数，即队长，此时队长过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 不再具有马尔柯夫性质. 令 T_n 表示从 $t=0$ 开始第 $n (n \geqslant 1)$ 个顾客的到达时刻，N_n^- 表示第 n 个顾客到达时看到系统中已有的顾客数（不包括刚到达的顾客），$N_0^- = N(0) - 1$，$N(0)$ 表示 $t=0$ 时的顾客数. 下面定理表明 $\{N_n^-, n \geqslant 0\}$ 构成马尔柯夫链，它称为该排队系统 $GI/M/c/\infty$ 的**嵌入马尔柯夫链**. 可以看出各随机变量 N_0^-，

$N_1^-,N_2^-,\cdots$均取非负整数值，只有N_0^-还可以取-1值，但若注意到$P\{N_1^-=0|_{N_0^-=-1}\}=1$，及$P\{N_n^-=-1|_{N_0^-=i}\}=0(n\geqslant1;i=-1,0,1,2,\cdots)$后，只有$N_0^-$能取$-1$，此后马尔柯夫链永远不再取$-1$值，所以$-1$仅是不可返状态，这样，把状态空间限制于$\{0,1,2,\cdots\}$上并不影响我们的讨论和结果.

定理 1 $\{N_n^-,n\geqslant0\}$为不可约、非周期的齐次马尔柯夫链，其一步转移概率

$$p_{ik}(1)=P\{N_{n+1}^-=k|_{N_n^-=i}\},\quad i、k=0,1,2,\cdots$$

由式子

$$p_{ik}(1)=\int_0^\infty\theta_{ik}(t)\mathrm{d}F(t) \tag{1}$$

给出，其中

$$\theta_{ik}(t)=\begin{cases}\dbinom{i+1}{k}(1-\mathrm{e}^{-\mu t})^{i+1-k}\mathrm{e}^{-k\mu t}, & 0\leqslant k\leqslant i+1,i<c\\ \displaystyle\int_0^t\mathrm{e}^{-c\mu x}\frac{c\mu(c\mu x)^{i-c}}{(i-c)!}\binom{c}{k}[1-\mathrm{e}^{-\mu(t-x)}]^{c-k}\mathrm{e}^{-k\mu(t-x)}\mathrm{d}x, & \\ & 0\leqslant k<c,i\geqslant c\\ \mathrm{e}^{-c\mu t}\dfrac{(c\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!}, & c\leqslant k\leqslant i+1,i\geqslant c\\ 0, & i+1<k\end{cases} \tag{2}$$

证明 设$\bar{v}_n$表示在到达间隔τ_n内服务完的顾客数，则显然有

$$N_{n+1}^-=N_n^-+1-\bar{v}_n \tag{3}$$

在条件$\{N_n^-=i\}$下，$\bar{v}_n$的条件分布为：

当$i\geqslant c$时，

$$P\{\tilde{v}_n = j|_{N_n^-=i}\} = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-c\mu t} \frac{(c\mu t)^j}{j!} dF(t), & 0 \leqslant j \leqslant i+1-c \\ \int_0^{\infty} \{\int_0^t e^{-c\mu x} \frac{(c\mu x)^{i-c} \cdot c\mu}{(i-c)!} \binom{c}{i-j+1} \\ \cdot e^{-(i-j+1)\mu(t-x)} [1 - e^{-\mu(t-x)}]^{j+c-i-1} dx\} dF(t), \\ \qquad i+1-c < j \leqslant i+1 \\ 0, & j < 0 \text{ 或 } j > i+1 \end{cases} \tag{4}$$

当 $i<c$ 时，

$$P\{\tilde{v}_n = j|_{N_n^-=i}\} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \binom{i+1}{j} e^{-\mu(i+1-j)t} (1 - e^{-\mu t})^j dF(t), \\ \qquad 0 \leqslant j \leqslant i+1 \\ 0, & j < 0 \text{ 或 } j > i+1 \end{cases} \tag{5}$$

由此可知，在 N_n^- 已知的条件下，$\tilde{v}_n$ 的分布与 $N_0^-, N_1^-, \cdots N_{n-1}^-$ 无关，故由式(3)即可看出 $\{N_n^-, n \geqslant 0\}$ 为齐次马尔柯夫链，其一步转移概率为

$$\begin{aligned} p_{ik}(1) &= P\{N_{n+1}^- = k|_{N_n^-=i}\} \\ &= P\{N_n^- + 1 - \tilde{v}_n = k|_{N_n^-=i}\} \\ &= P\{\tilde{v}_n = i-k+1|_{N_n^-=i}\} \end{aligned} \tag{6}$$

于是结合 $\tilde{v}_n$ 的条件分布即得 $p_{ik}(1), i,k=0,1,2,\cdots$

由于 $p_{i,i+1}(1)>0, p_{i,0}(1)>0, (i=0,1,2,\cdots)$，即任意两个状态是互通的，所以状态 $\{0,1,2,\cdots\}$ 不可约，构成一个类. 又 $p_{ii}(1)>0$，因此是非周期的. 至此定理 1 证毕.



对 $c=1$，即 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，嵌入马尔柯夫链 $\{N_n^-, n \geqslant 0\}$ 的一步转移概率为

$$p_{ik}(1)=\begin{cases}\int_0^{\infty}(1-e^{-\mu t})dF(t), & i=0,k=0\\ \int_0^{\infty}e^{-\mu t}dF(t), & i=0,k=1\\ \int_0^{\infty}\left[1-e^{-\mu t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\mu t)^j}{j!}\right]dF(t), & i\geqslant 1,k=0\\ \int_0^{\infty}\frac{(\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!}e^{-\mu t}dF(t), & 1\leqslant k\leqslant i+1,i\geqslant 1\\ 0, & i+1<k,i\geqslant 0\end{cases}\tag{7}$$

写成矩阵形式：

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix}1-b_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 1-\sum_{j=0}^{1}b_j & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots\\ 1-\sum_{j=0}^{2}b_j & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots\\ 1-\sum_{j=0}^{3}b_j & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}\tag{8}$$

其中 $b_j=\int_0^{\infty}\frac{(\mu t)^j}{j!}e^{-\mu t}dF(t)$， $j=0,1,2,\cdots$

引理 1[9,p102] 对于一个不可约、非周期的马尔柯夫链，若方程组

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i p_{ij}(1)=x_j,\quad j=0,1,2,\cdots\tag{9}$$

存在 $\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|<\infty$ 的非零解，则此马尔柯夫链为正常返的. 反之，若马尔柯夫链为正常返的，则不等式组

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i p_{ij}(1)\leqslant x_j,\quad j=0,1,2,\cdots\tag{10}$$

的任何至多有限个 x_i 为负的解具有性质 $\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|<\infty$.

引理 2[9,p49] 设$\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$为概率分布，且$p_0>0$，则方程

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_j z^j = z \tag{11}$$

在$0<z<1$内有惟一解的充分必要条件是$\sum_{j=1}^{\infty} j p_j > 1$.

定理 2 $GI/M/c/\infty$排队系统的嵌人马尔柯夫链$\{N_n^-, n\geqslant 0\}$为正常返的充要条件是$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$.

证明 充分性. 设$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$，考虑方程组(9)的解. 先看方程组(9)的$j=c$以后的方程，即

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i p_{ij}(1) = x_j, \quad j=c,c+1,\cdots$$

此时，对$j=c,c+1,\cdots$有

$$p_{ij}(1)=\begin{cases}\int_0^{\infty} e^{-c\mu t}\frac{(c\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}dF(t), & i\geqslant j-1\\ 0, & i<j-1\end{cases}$$

于是上面的方程组化为

$$\sum_{i=j-1}^{\infty} x_i \cdot \int_0^{\infty} e^{-c\mu t}\frac{(c\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}dF(t) = x_j, \quad j=c,c+1,\cdots \tag{12}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\int_0^{\infty} e^{-c\mu t}\frac{(c\mu t)^k}{k!}dF(t)=\frac{1}{\rho}>1$$

因此据引理 2，知方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k\cdot\int_0^{\infty} e^{-c\mu t}\frac{(c\mu t)^k}{k!}dF(t)=z$$

在(0,1)内有惟一解，记为$\delta(0<\delta<1)$. 于是令

$$x_i=\delta^{i-c}, \quad i=c-1,c,c+1,\cdots \tag{13}$$

易验证式(13)即为方程组(12)，即方程组(9)的 $j=c$ 以后的方程组的一组解.

再考虑方程组(9)的 $j=1$ 到 $j=c-1$ 的 $c-1$ 个方程. 将式(13)代入此方程，即得 $c-1$ 个变量 $x_0,x_1,\cdots,c_{c-2}$的 $c-1$ 个方程的非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} p_{01}(1)x_0+[p_{11}(1)-1]x_1+p_{21}(1)x_2+\cdots+p_{c-2,1}(1)x_{c-2} \\ \qquad\qquad =-\sum_{i=c-1}^{\infty}\delta^{i-c}p_{i1}(1) \\ p_{12}(1)x_1+[p_{22}(1)-1]x_2+\cdots+p_{c-2,2}(1)x_{c-2} \\ \qquad\qquad =-\sum_{i=c-1}^{\infty}\delta^{i-c}p_{i2}(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad p_{c-2,c-1}(1)x_{c-2}=\delta^{-1}-\sum_{i=c-1}^{\infty}\delta^{i-c}p_{i,c-1}(1) \end{cases}$$

其系数矩阵行列式为 $p_{01}(1)\cdot p_{12}(1)\cdot\cdots\cdot p_{c-2,c-1}(1)\neq 0$，因此可得惟一解

$$x_i=\beta_i,\quad i=0,1,2,\cdots,c-2$$

由于齐次马尔柯夫链$\{N_n^-,n\geqslant 0\}$的一步转移概率矩阵的转置矩阵恰是方程组(9)的系数矩阵，且系数矩阵的行和为 1，所以

$$x_i=\begin{cases}\beta_i, & i=0,1,2,\cdots,c-2 \\ \delta^{i-c}, & i=c-1,c,\cdots\end{cases} \tag{14}$$

也为方程组(9)中 $j=0$ 的方程

$$p_{00}(1)x_0+p_{10}(1)x_1+\cdots+p_{c-2,0}(1)x_{c-2} \\ +p_{c-1,0}(1)x_{c-1}+\cdots=x_0$$

的解，这样就求得了方程组(9)的一组非零解式(14)，且由 $0<\delta<1$ 即知此组解满足 $\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|<\infty$，于是由引理 1 知此马尔柯夫链是正常返的.

必要性. 设马尔柯夫链为正常返，要证 $\rho<1$. 用反证法，假设 $\rho\geqslant$

1，取

$$x_j = 1, \quad j = c-1, c, \cdots \tag{15}$$

则对 $j=c, c+1, \cdots$ 由于

$$p_{ij}(1) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-c\mu t} \dfrac{(c\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} dF(t), & i \geqslant j-1 \\ 0, & i < j-1 \end{cases}$$

有式(15)满足式(10)中 $j=c$ 开始后的所有不等式.

再考虑式(10)中 $j=1$ 到 $j=c-1$ 的 $c-1$ 个取等号的方程，且以式(15)代入，得

$$\begin{cases} p_{01}(1)x_0 + [p_{11}(1)-1]x_1 + p_{21}(1)x_2 + \cdots + p_{c-2,1}(1)x_{c-2} \\ \qquad = -\sum\limits_{i=c-1}^{\infty} p_{i1}(1) \\ p_{12}(1)x_1 + [p_{22}(1)-1]x_2 + \cdots + p_{c-2,2}(1)x_{c-2} \\ \qquad = -\sum\limits_{i=c-1}^{\infty} p_{i2}(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{c-3,c-2}(1)x_{c-3} + [p_{c-2,c-2}(1)-1]x_{c-2} \\ \qquad = -\sum\limits_{i=c-1}^{\infty} p_{i,c-2}(1) \\ p_{c-2,c-1}(1)x_{c-2} = 1 - \sum\limits_{i=c-1}^{\infty} p_{i,c-1}(1) \end{cases} \tag{16}$$

此方程组为 $c-1$ 个未知数 $x_0, x_1, \cdots, x_{c-2}$ 的 $c-1$ 个方程的非齐次线性方程组，其系数行列式为 $p_{01}(1) \cdot p_{12}(1) \cdot \cdots \cdot p_{c-2,c-1}(1) \neq 0$，故存在惟一解

$$x_i = \beta_i^*, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, c-2 \tag{17}$$

将式(17)代入方程组(16)，并将左、右分别相加，注意到方程组(10)左边系数矩阵的行和为1，且 $\sum\limits_{j=0}^{c-1}\sum\limits_{i=c-1}^{\infty} p_{ij}(1) = \dfrac{1}{\rho}$，得

$$[p_{00}(1)-1]\beta_0^* + p_{10}(1)\beta_1^* + \cdots + p_{c-2,0}(1)\beta_{c-2}^*$$

$$=\frac{1}{\rho}-1-\sum_{i=c-1}^{\infty}p_{i0}(1)$$

$$\leqslant-\sum_{i=c-1}^{\infty}p_{i0}(1)$$

此式表明解式(15)与式(17),即

$$x_i=\begin{cases}\beta_i^*, & i=0,1,2,\cdots,c-2\\ 1, & i=c-1,c,\cdots\end{cases}\tag{18}$$

满足式(10)中 $j=0$ 这一不等式.

综合前面,我们找到了一组解式(18),且至多有限个 x_i 为负,满足式(10),但 $\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|=\infty$,这与引理 1 矛盾,于是只有 $\rho<1$. 至此定理 1 证毕.



定理 3　对于 $GI/M/c/\infty$ 排队系统的嵌入马尔柯夫链 $\{N_n^-,n\geqslant 0\}$,

1)当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}\geqslant 1$ 时,此马尔柯夫链是零常返或非常返,n 步转移概率的极限

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=0,\quad i、j=0,1,2,\cdots\tag{19}$$

且不存在平稳分布.

2)当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 时,此马尔柯夫链是正常返的,n 步转移概率的极限存在,与初始条件无关,且

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=\lim_{n\to\infty}P\{N_n^-=j\}=p_j^->0\tag{20}$$

为惟一的平稳分布,其表达式为

$$p_j^-=\begin{cases}\sum_{r=j}^{c-1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}U_r, & j=0,1,2,\cdots,c-1\\ K^*\delta^{j-c}, & j=c,c+1,\cdots\end{cases}\tag{21}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z=f(c\mu(1-z))=\int_0^{\infty}e^{-c\mu(1-z)t}dF(t)$ 在 $(0,1)$ 内的惟一解,而且

$$U_r = K^* D_r \sum_{k=r+1}^{c} \frac{\binom{c}{k}}{D_k(1-\varepsilon_k)} \cdot \frac{c(1-\varepsilon_k)-k}{c(1-\delta)-k},$$

$$r = 0,1,2,\cdots,c-1 \tag{22}$$

$$K^* = \left[\frac{1}{1-\delta} + \sum_{k=1}^{c} \frac{\binom{c}{k}}{D_k(1-\varepsilon_k)} \cdot \frac{c(1-\varepsilon_k)-k}{c(1-\delta)-k}\right]^{-1} \tag{23}$$

$$D_0 = 1,$$

$$D_k = \prod_{l=1}^{k} \frac{\varepsilon_l}{1-\varepsilon_l}, \quad k = 1,2,\cdots,c \tag{24}$$

$$\varepsilon_l = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-l\mu t}\mathrm{d}F(t), \quad l = 1,2,\cdots \tag{25}$$

证明 由第一章§5中定理2和本节中定理2知，当$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}\geqslant 1$时，嵌入马尔柯夫链$\{N_n^-,n\geqslant 0\}$的所有状态均为零常返或非常返，此时$p_j^-=0,j\geqslant 0$，且不存在平稳分布，当$\rho<1$时，平稳分布$\{p_j^-,j\geqslant 0\}$存在，且与初始条件无关．下面只需求解方程组

$$p_j^- = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^- \cdot p_{ij}(1), \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{26}$$

满足正则条件$\sum_{j=0}^{\infty} p_j^- = 1$的解$\{p_j^-,j\geqslant 0\}$.

当$j\geqslant c$时，

$$p_{ij}(1) = \begin{cases} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-c\mu t} \frac{(c\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}\mathrm{d}F(t), & i \geqslant j-1 \\ 0, & i < j-1 \end{cases}$$

故式(26)中$j=c$开始的所有方程可写为

$$p_j^- = \sum_{i=j-1}^{\infty} p_i^- \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-c\mu t} \frac{(c\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}\mathrm{d}F(t), \quad j = c,c+1,\cdots \tag{27}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \int_0^{\infty} e^{-c\mu t} \frac{(c\mu t)^k}{k!} dF(t) = \frac{1}{\rho} > 0$$

因而由引理 2，知方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \int_0^{\infty} e^{-c\mu t} \frac{(c\mu t)^k}{k!} dF(t) = f(c\mu(1-z)) = z$$

在(0,1)内有惟一解，记为 $\delta(0<\delta<1)$. 令

$$p_j^- = K^* \cdot \delta^{j-c}, \quad i = c-1, c, c+1, \cdots \tag{28}$$

其中 K^* 为待定常数，则很容易验证式(28)为方程组(27)的一组解，于是由式(28)即得所求的式(21)的 $j \geqslant c$ 那部分. 特别地，当 $j=c-1$ 时，有

$$K^* = \delta \cdot p_{c-1}^-$$

因此，只要求出 p_{c-1}^- 后即可确定常数 K^*.

当 $c=1$ 时，即 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，上式化为

$$K^* = \delta \cdot p_0^-$$

代入式(28)，得

$$p_j^- = p_0^- \cdot \delta^j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

由正则条件 $\sum_{j=0}^{\infty} p_j^- = 1$，得

$$p_0^- = 1 - \delta$$

于是

$$p_j^- = (1-\delta) \cdot \delta^j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{29}$$

此时 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dF(t) = f(\mu(1-z))$ 在(0,1)内的惟一解.

当 $c>1$ 时，为了求 $p_0^-, p_1^-, \cdots, p_{c-1}^-$，引进函数

$$U(z) = \sum_{k=0}^{c-1} p_k^- z^k$$

令

$$U_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right]\bigg|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, c-1$$

则由 $U(z)$ 的定义，得

$$U_r = \sum_{l=r}^{c-1} \binom{l}{r} p_l^-, \quad r = 0,1,2,\cdots,c-1$$

两边乘 $(-1)^{r-j} \cdot \binom{r}{j}$ 后对 r 从 j 到 $c-1$ 求和，得

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=j}^{c-1} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} U_r \\
&= \sum_{r=j}^{c-1} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \sum_{l=r}^{c-1} \binom{l}{r} p_l^- \\
&= \sum_{l=j}^{c-1} p_l^- \sum_{r=j}^{l} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \binom{l}{r} \\
&= \sum_{l=j}^{c-1} p_l^- \binom{l}{j} \sum_{r=j}^{l} (-1)^{r-j} \binom{l-j}{r-j} \\
&= p_j^- + \sum_{l=j+1}^{c-1} p_l^- \binom{l}{j} \cdot \left[\sum_{r=j}^{l-1} (-1)^{r-j} \binom{l-j}{r-j} + (-1)^{l-j} \right] \\
&= p_j^- + \sum_{l=j+1}^{c-1} p_l^- \cdot \binom{l}{j} \left[(-1)^{l-j-1} \binom{l-j-1}{r-j-1} + (-1)^{l-j} \right] \\
&= p_j^- \quad , \quad j = 0,1,2,\cdots,c-1
\end{aligned}$$

此即所求的式(21)的前半部分.剩下的只是求出 U_r 的表达式及确定待定常数 K^*.

由式(26)和式(1)，即可证明 $U(z)$ 满足下列积分方程：

$$\begin{aligned}
U(z) = &\int_0^{\infty} [1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}] \cdot U(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) dF(x) \\
&+ K^* \int_0^{\infty} \left[\int_0^x e^{c\mu t} (e^{-\mu t} - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x})^c \cdot c\mu dt \right] dF(x) \\
&- K^* z^c
\end{aligned} \tag{30}$$

由定义，

$$\begin{aligned}
U_0 = U(1) &= \sum_{j=0}^{c-1} p_j^- \\
&= 1 - \sum_{j=c}^{\infty} p_j^- = 1 - \frac{K^*}{1-\delta}
\end{aligned} \tag{31}$$

将式(30)求导 k 次,$k=1,2,\cdots,c-1$,并令 $z=1$,即得

$$U_k = \varepsilon_k U_k + \varepsilon_k U_{k-1} - K^* \binom{c}{k} \frac{c(1-\varepsilon_k)-k}{c(1-\delta)-k},$$

$$k=1,2,\cdots,c-1$$

其中 ε_k 为式(25)所定义. 因此

$$U_k = \frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k} U_{k-1} - \frac{K^* \binom{c}{k}}{(1-\varepsilon_k)} \cdot \frac{c(1-\varepsilon_k)-k}{c(1-\delta)-k},$$

$$k=1,2,\cdots,c-1 \qquad (32)$$

将式(32)两端除以 D_k,再对 k 从 $r+1$ 到 $c-1$ 求和,并注意到

$$U_{c-1} = p_{c-1}^- = K^* \cdot \delta^{-1}$$

即得

$$\frac{U_r}{D_r} = K^* \sum_{k=r+1}^{c} \frac{\binom{c}{k}}{D_k(1-\varepsilon_k)} \cdot \frac{c(1-\varepsilon_k)-k}{c(1-\delta)-k},$$

$$r=0,1,2,\cdots,c-1$$

此即所求式(22).

令 $r=0$,得

$$\frac{U_0}{D_0} = K^* \sum_{k=1}^{c} \frac{\binom{c}{k}}{D_k(1-\varepsilon_k)} \cdot \frac{c(1-\varepsilon_k)-k}{c(1-\delta)-k} \qquad (33)$$

将式(31)代入式(33)即可得 K^* 的表达式(23). 至此定理 3 证毕. ■

推论 1 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统,在统计平衡下,顾客到达系统时看到的顾客数记为 N^-,则

$$E[N^-] = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j^- = \begin{cases} \dfrac{\delta}{1-\delta}, & c=1 \\ U_1 + K^* \cdot \dfrac{\delta + c(1-\delta)}{(1-\delta)^2}, & c>1 \end{cases} \qquad (34)$$

推论 2 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统,在统计平衡下,顾客到达系统时正在等待服务的顾客数 N_q^- 的分布为

$$P\{N_q^- = j\} = \begin{cases} 1 - \dfrac{K^* \delta}{1-\delta}, & j = 0 \\ K^* \delta^j, & j = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{35}$$

而平均值

$$E[N_q^-] = \frac{K^* \delta}{(1-\delta)^2} \tag{36}$$

推论 3 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，若 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$，则

$$p_j^- = (1-\delta)\delta^j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{37}$$

而且

$$E[N^-] = \frac{\delta}{1-\delta} \tag{38}$$

$$E[N_q^-] = \frac{\delta^2}{1-\delta} \tag{39}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为 $z=f(\mu(1-z))$ 在 $(0,1)$ 内的惟一解.

推论 4 对 $E_k/M/1/\infty$ 排队系统，即到达间隔时间为参数 $\lambda(>0)$ 的 k 阶爱尔朗分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{(\lambda t)^i}{i!}, t \geqslant 0$，则当 $\rho = \dfrac{\lambda}{k\mu} < 1$ 时，有

$$p_j^- = (1-\delta)\delta^j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{40}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程

$$z\left(1 + \frac{1-z}{k\rho}\right)^k = 1$$

在 $(0,1)$ 内的惟一解.

§2 队　　长

在本节中我们将考虑任意时刻 t 的队长 $N(t)$ 的平稳性质，所用知识主要是更新过程理论.

定理1 对$GI/M/c/\infty$排队系统，令$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\},j=0,1,2,\cdots$则

1）当$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}\geqslant 1$时，$p_j=0,j\geqslant 0$；

2）当$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}<1$，且到达间隔时间分布$F(t)$为格分布时，极限$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}$不存在，$j\geqslant 0$；

3）当$\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}<1$，且到达间隔时间分布$F(t)$不为格分布时，极限$\{p_j,j\geqslant 0\}$存在，与初始条件无关，而且

$$p_j=\begin{cases}1-\rho-c\rho\sum\limits_{k=1}^{c-1}p_{k-1}^{-}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{c}\right), & j=0\\ \dfrac{c\rho}{j}p_{j-1}^{-}, & j=1,2,\cdots,c-1\\ \rho p_{j-1}^{-}, & j=c,c+1,\cdots\end{cases}\tag{1}$$

证明 令顾客相继到达时刻为$T_1,T_2,\cdots$且

$$p_{ij}(t)=P\{N(t)=j|_{N(0)=i}\}\tag{2}$$

$$p_{ij}(m,t)=P\{N_m^{-}=j,T_m\leqslant t|_{N_0^{-}=i}\}\tag{3}$$

易知在初始队长为i的条件下，顾客到达时看到队长为j的那些时刻构成一个更新过程的更新时刻，记其更新函数为

$$\widetilde{M}_{ij}(t)=\sum_{m=1}^{\infty}p_{ij}(m,t)\tag{4}$$

并记

$$\widetilde{M}_i(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{M}_{ij}(t)\tag{5}$$

则

$$\widetilde{M}_i(t)=\sum_{m=1}^{\infty}P\{T_m\leqslant t|_{N(0)=i}\}=\sum_{m=1}^{\infty}F^{(m)}(t)\tag{6}$$

是输入这一更新过程的更新函数（与初始队长无关），其中$F^{(m)}(t)$为$F(t)$的m重卷积. 因此由基本更新定理，极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_i(t)}{t}=\lambda>0,\quad i\geqslant 0 \tag{7}$$

存在，且独立于 i，故有

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{M}_i(t)=\infty \tag{8}$$

再令 $\widetilde{M}_{ij}^{(m)}$ 为初始队长为 i 的条件下，前 m 个顾客到达时遇到队长为 j 的那些到达时刻的平均个数. 由本章 § 1 中定理 3，有

$$\lim_{m\to\infty}p_{ij}(m)=p_j^-\begin{cases}>0, & \rho<1\\ =0, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{9}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{M}_{ij}^{(m)}}{m}&=\lim_{m\to\infty}\frac{p_{ij}(1)+p_{ij}(2)+\cdots+p_{ij}(m)}{m}\\&=p_j^-,\quad i、j\geqslant 0\end{aligned} \tag{10}$$

由式(8)与式(10)得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_{ij}(t)}{\widetilde{M}_i(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_{ij}{}^{(\widetilde{M}_i(t))}}{\widetilde{M}_i(t)}=p_j^-,\quad i、j\geqslant 0 \tag{11}$$

结合式(7)与式(11)，得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_{ij}(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_{ij}(t)}{\widetilde{M}_i(t)}\cdot\frac{\widetilde{M}_i(t)}{t}=\lambda p_j^-,\quad i、j\geqslant 0 \tag{12}$$

对 $i、j\geqslant 0$，考虑：

$$\begin{aligned}p_{ij}(t)&=P\{N(t)=j,T_1>t\,|_{N(0)=i}\}\\&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}P\{N(t)=j,T_m\leqslant t<T_{m+1}\,|_{N(0)=i}\}\\&=P\{N(t)=j,T_1>t\,|_{N(0)=i}\}\\&\quad+\sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{\infty}\\&\quad P\{N(t)=j,N_m^-=k,T_m\leqslant t<T_{m+1}\,|_{N(0)=i}\}\\&=\theta_{i-1,j}(t)[1-F(t)]\\&\quad+\sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\theta_{kj}(t-x)[1-F(t-x)]\mathrm{d}p_{ik}(m,x)\\&=\theta_{i-1,j}(t)[1-F(t)]\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty}\int_0^t \theta_{kj}(t-x)[1-F(t-x)]\mathrm{d}\tilde{M}_{ik}(x) \tag{13}$$

其中，$\theta_{-1,j}=\begin{cases}1, & j=0\\ 0, & j>0\end{cases}$，$\theta_{ij}(t)$ 为本章§1中的式(2)确定(i、$j\geqslant 0$).

1)当 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}\geqslant 1$ 时，若 $F(t)$ 不是格分布，则易知对上述顾客到达时看到队长为 j 的那些时刻所构成的更新过程，其更新间隔也不是格分布. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)&=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty}\int_0^t \theta_{kj}(t-x)[1-F(t-x)]\mathrm{d}\tilde{M}_{ik}(x)\\ &=\sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \theta_{kj}(t-x)[1-F(t-x)]\mathrm{d}\tilde{M}_{ik}(x)\end{aligned} \tag{14}$$

且与初始状态 i 无关.

上式中，极限过程可取入求和号的证明见参考文献[9]中第117～118页.

由第一章§4中定理3的1)、2)和4)，知 $\theta_{kj}(t)[1-F(t)]$ 是直接黎曼可积的. 利用关键更新定理并结合式(12)，得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\int_0^t \theta_{kj}(t-x)[1-F(t-x)]\mathrm{d}\tilde{M}_{ik}(x)\\ &=\lambda p_k^-\cdot\int_0^{\infty}\theta_{kj}(x)[1-F(x)]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{15}$$

于是结合本章§1中定理3，知

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)&=\sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty}\lambda p_k^-\cdot\int_0^{\infty}\theta_{kj}(x)[1-F(x)]\mathrm{d}x\\ &=0\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}p_j&=\lim_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(0)=i\}\cdot p_{ij}(t)\\ &=0,\quad j\geqslant 0\end{aligned}$$

若 $F(t)$ 是格分布，其跨度为 l，则从式(13)出发，根据格分布时

的关键更新定理，类似式(16)的推导，得

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim_{m\to\infty} P\{N(ml+d)=j\}$$

$$= \sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty} \lambda l \cdot p_k^- \sum_{i=0}^{\infty} \theta_{kj}(il+d)[1-F(il+d)],$$

$$j \geqslant 0 \tag{17}$$

其中 d 满足 $0 \leqslant d < l$，m 为正整数. 但当 $\rho \geqslant 1$ 时，$p_k^- = 0, k \geqslant 0$，所以 $p_j = 0, j = 0,1,2,\cdots$

2)当 $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$，且 $F(t)$ 为格分布时，由式(17)知

$$p_j = \sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty} \lambda l \cdot p_k^- \sum_{i=0}^{\infty} \theta_{kj}(il+d)[1-F(il+d)] \tag{18}$$

与 d 有关.

当 $\rho < 1$ 时，$p_k^- > 0, k \geqslant 0$，因此式(18)的右端大于 0，但右端对不同的 d 是取不同的值，故此时 p_j 不存在，$j \geqslant 0$.

3)当 $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$，且 $F(t)$ 不为格分布时，由式(13)出发，类似式(16)的推导，得

$$p_j = \lim_{t\to\infty} P\{N(t)=j\} = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(0)=i\} \cdot p_{ij}(t)$$

$$= \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \sum_{k=\max(j-1,0)}^{\infty} \lambda p_k^- \cdot \int_0^{\infty} \theta_{kj}(x)[1-F(x)]\mathrm{d}x \tag{19}$$

考虑初始队长为 i 的条件下，顾客服务完毕离开系统时使队长由 j 转移到 $j-1$ 的那些时刻. 令 $M_{ij}(t)$ 为 $(0,t]$ 内这些时刻的平均数，由数学期望的定义，显见

$$M_{ij}(t) = \begin{cases} \int_0^t p_{ij}(x) \cdot j\mu \mathrm{d}x, & j < c \\ \int_0^t p_{ij}(x) \cdot c\mu \mathrm{d}x, & j \geqslant c \end{cases} \tag{20}$$

结合式(19)，得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{ij}(t)}{t}=\begin{cases}j\mu p_j, & j<c\\ c\mu p_j, & j\leqslant c\end{cases}\tag{21}$$

但在$(0,t]$内队长由 $j-1$ 转移到 j 的次数与队长由 j 转移到 $j-1$ 的次数之差不会超过一次，故

$$|\widetilde{M}_{i,j-1}(t)-M_{ij}(t)|\leqslant 1,\quad t\geqslant 0,i\geqslant 0,j\geqslant 1$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_{i,j-1}(t)}{t}&=\lim_{t\to\infty}\frac{M_{ij}(t)}{t}\\ &=\begin{cases}j\mu p_j, & 1\leqslant j<c\\ c\mu p_j, & j\geqslant c\end{cases}\end{aligned}\tag{22}$$

比较式(12)与式(22)，即得

$$\lambda p_{j-1}^{-}=\begin{cases}j\mu p_j, & 1\leqslant j<c\\ c\mu p_j, & j\geqslant c\end{cases}\tag{23}$$

此即所证的式(1)的后两式. 但当 $\rho<1$ 时，所有 $p_j^{-}>0$，且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_j^{-}=1$，因此由式(19)知 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_j=1$. 故将式(22)对 j 从 1 到∞求和即得所证的式(1)的第一式. 至此定理 1 证毕.



推论 1 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在统计平衡($\rho<1$)下，平均队长

$$\overline{N}=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j=c\rho+\frac{K^{*}\rho}{(1-\delta)^2}\tag{24}$$

其中 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}$，$K^{*}$ 由本章 §1 中式(23)给出，$\delta(0<\delta<1)$为方程 $z=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-c\mu(1-z)t}\mathrm{d}F(t)$ 在$(0,1)$内的惟一解.

推论 2 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在统计平衡($\rho<1$)下，等待队

长 N_q 的分布为

$$P\{N_q = j\} = \begin{cases} 1 - \dfrac{K^* \rho}{1-\delta}, & j = 0 \\ K^* \rho \delta^{j-1}, & j = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{25}$$

而平均等待队长

$$\overline{N}_q = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P\{N_q = j\} = \frac{K^* \rho}{(1-\delta)^2} \tag{26}$$

推论 3 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，

1) 当 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \geqslant 1$ 时，$p_j = 0, j \geqslant 0$；

2) 当 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$，且 $F(t)$ 为格分布时，$\lim\limits_{t\to\infty} P\{N(t) = j\}$ 不存在；

3) 当 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$，且 $F(t)$ 不为格分布时，

$$p_j = \begin{cases} 1 - \rho, & j = 0 \\ \rho(1-\delta)\delta^{j-1}, & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{27}$$

而且

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{28}$$

$$\overline{N}_q = \frac{\rho\delta}{1-\delta} \tag{29}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z = \int_0^{\infty} e^{-\mu(1-z)t} dF(t)$ 在 $(0,1)$ 内的惟一解.

推论 4 对 $E_k/M/1/\infty$ 排队系统，即到达间隔时间分布 $F(t)$ 为参数 $\lambda(>0)$ 的 k 阶爱尔朗分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda t)^i}{i!}, t \geqslant 0$，则当 $\rho = \dfrac{\lambda}{k\mu} < 1$ 时，

$$p_j = \begin{cases} 1 - \rho, & j = 0 \\ \rho(1-\delta)\delta^{j-1}, & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{30}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z\left(1+\frac{1-z}{k\rho}\right)^k=1$ 在$(0,1)$内的惟一解.

推论 5 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统,在 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 条件下,$p_j^-=p_j$ $(j\geq0)$ 的必要充分条件是 $GI=M$,即输入为参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流.

证明 充分性. 若输入为 Poisson 流,则 $\delta=\rho$,因此显然有 $p_j^-=p_j, j\geq0$.

必要性. 若 $p_j^-=p_j, j\geq0$,则根据本章 §1 中定理 3 与本章 §2 中定理 1,即可推得

$$\delta=\rho$$

故 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}$ 满足方程 $z=\int_0^\infty e^{-c\mu(1-z)t}dF(t)$,即

$$f(c\mu(1-\rho))=\rho$$

令 $s=c\mu(1-\rho)$,则 $c\mu=s+\lambda$,且

$$f(s)=\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

即 $F(t)=1-e^{-\lambda t}, t\geq0$,故输入为 λ 的 Poisson 流.

§3 等待时间与逗留时间

在 $GI/M/c/\infty$ 排队系统中,仍然假定顾客是先到先服务的. 令第 m 个顾客的等待时间为 W_{q_m},其分布函数为

$$P\{W_{q_m}\leq t\}=W_{q_m}(t)$$

定理 1 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统,

1)当 $\rho\geq1$ 时,极限

$$\lim_{m\to\infty}W_{q_m}(t)=0,\quad t\geq0$$

2)当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 时,极限

$$\lim_{m\to\infty} W_{q_m}(t) = W_q(t)$$

存在，且与初始条件无关，其表达式

$$W_q(t) = 1 - \frac{K^* e^{-c\mu(1-\delta)t}}{1-\delta}, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

其中 K^* 由本章 §1 中式(23)给出，$\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z = \int_0^\infty e^{-c\mu(1-z)t} dF(t)$ 在(0,1)内的惟一解.

证明 第 m 个顾客到达时，若发现队长 $N_m^- = j$，则当 $j<c$ 时，他不用等待就可开始服务，当 $j\geqslant c$ 时，就必须等到服务完 $j-c+1$ 个后才能开始服务，因此由全概率分解定理，得

$$W_{q_m}(t) = \sum_{j=0}^{c-1} P\{N_m^- = j\}$$

$$+ \sum_{j=c}^{\infty} P\{N_m^- = j\} \cdot \int_0^t e^{-c\mu x} \frac{(c\mu x)^{j-c} \cdot c\mu}{(j-c)!} dx$$

令 $m\to\infty$，由本章 §1 定理 3，当 $\rho\geqslant 1$ 时，$\lim_{m\to\infty} W_{q_m}(t) = 0$，当 $\rho<1$ 时，上式右端的极限存在，且

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \sum_{j=0}^{c-1} p_j^- + \sum_{j=c}^{\infty} p_j^- \cdot \int_0^t e^{-c\mu x} \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} dx \\ &= 1 - \frac{K^*}{1-\delta} + K^* \sum_{j=c}^{\infty} \delta^{j-c} \cdot \int_0^t e^{-c\mu x} \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} dx \\ &= 1 - \frac{K^*}{1-\delta} + \frac{K^*}{1-\delta}\left[1 - e^{-c\mu(1-\delta)t}\right] \\ &= 1 - \frac{K^* e^{-c\mu(1-\delta)t}}{1-\delta} \end{aligned}$$

此即证的式(1).

■

定理 2 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，令 W_m 表示第 m 个顾客的逗留时间，则

1）当 $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} \geqslant 1$ 时，

$$\lim_{m\to\infty} P\{W_m \leqslant t\} = \lim_{m\to\infty} W_m(t) = 0, \quad t \geqslant 0$$

2) 当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 时，

$$W(t) = \lim_{m\to\infty} W_m(t)$$

存在，与初始条件无关，且

$$W(t) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \frac{K^* \mu}{1-\delta} t\right] e^{-\mu t}, & c(1-\delta) = 1 \\ 1 - e^{-\mu t} - \frac{K^*}{(1-\delta)[1-c(1-\delta)]} \{e^{-c\mu(1-\delta)t} - e^{-\mu t}\}, & \\ & c(1-\delta) \neq 1 \end{cases} \tag{2}$$

证明 因为 $W_m = W_{q_m} + \chi_m$，且 W_{q_m} 与 χ_m 相互独立，其中 χ_m 为第 m 个顾客的服务时间，故利用分布函数的拉普拉斯—司梯阶卷积运算即可证.

▓

推论 1 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在统计平衡($\rho<1$)下，顾客到达时不需等待的概率为

$$p = W_q(0) = 1 - \frac{K^*}{1-\delta} \tag{3}$$

平均等待时间与平均逗留时间分别为

$$\overline{W}_q = \frac{K^*}{c\mu(1-\delta)^2} \tag{4}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{K^*}{c\mu(1-\delta)^2} \tag{5}$$

推论 2 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，

1) 当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}\geqslant 1$ 时，

$$W_q(t) = 0, \quad W(t) = 0, \quad t \geqslant 0$$

2)当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 时，

$$W_q(t)=1-\delta e^{-\mu(1-\delta)t},\quad t\geqslant 0 \tag{6}$$

$$W(t)=1-e^{-\mu(1-\delta)t},\quad t\geqslant 0 \tag{7}$$

且平均等待时间与平均逗留时间分别为

$$\overline{W}_q=\frac{\delta}{\mu(1-\delta)};\quad \overline{W}=\frac{1}{\mu(1-\delta)} \tag{8}$$

3)在统计平衡($\rho<1$)下，顾客到达时不需等待的概率为

$$p=W_q(0)=1-\delta \tag{9}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z=\int_0^\infty e^{-\mu(1-z)t}dF(t)$ 在(0,1)的惟一解.

推论 3 对 $E_k/M/1/\infty$ 排队系统，即到达间隔时间分布 $F(t)$ 为参数 $\lambda(>0)$ 的 k 阶爱尔朗分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{(\lambda t)^i}{i!}$，$t\geqslant 0$，则当 $\rho=\dfrac{\lambda}{k\mu}<1$ 时，

$$W_q(t)=1-\delta e^{-\mu(1-\delta)t},\quad t\geqslant 0 \tag{10}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z\left(1+\dfrac{1-z}{k\rho}\right)^k=1$ 在(0,1)内的惟一解.

推论 4 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在统计平衡下，当 $c=1$ 时，即 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，Little 公式成立；当 $c>1$ 时，Little 公式不成立.

现在考虑在任意时刻 s 到达的顾客的等待时间 W_q^s. 由于在任意时刻 s 不一定真有顾客到达，所以等待时间 W_q^s 通常称为**虚等待时间**. 令其分布为

$$W_q^s(t)=P\{W_q^s\leqslant t\},\quad t\geqslant 0;\quad s\geqslant 0$$

定理 3 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，

1) 当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}\geqslant 1$ 时，则极限

$$\lim_{s\to\infty} W_q^s(t) = 0$$

2) 当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 时，且到达间隔时间分布 $F(t)$ 为格分布，则极限 $\lim\limits_{s\to\infty} W_q^s(t)$ 不存在.

3) 当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 时，且到达间隔时间分布 $F(t)$ 不为格分布时，则极限

$$\lim_{s\to\infty} W_q^s(t) = \widetilde{W}_q(t)$$

存在，与初始条件无关，且

$$\widetilde{W}_q(t) = 1 - \frac{\rho K^*}{\delta(1-\delta)} e^{-c\mu(1-\delta)t}, \quad t \geqslant 0 \tag{11}$$

其中 K^* 由本章 §1 中式(23) 给出，$\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z = \int_0^\infty e^{-c\mu(1-z)t} dF(t)$ 在(0,1)内惟一解.

证明 与定理 2 的证明同理，可得

$$W_q^s(t) = \sum_{j=0}^{c-1} P\{N^-(s) = j\} + \sum_{j=c}^{\infty} P\{N^-(s) = j\} \cdot \int_0^t e^{-c\mu x} \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} dx$$

令 $s\to\infty$，并利用本章 §2 中定理即证.



推论 5 对 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在统计平衡($\rho<1$)下，任意时刻到达的顾客不需等待的概率为

$$\widetilde{p} = \widetilde{W}_q(0) = 1 - \frac{\rho K^*}{\delta(1-\delta)} \tag{12}$$

平均虚等待时间为

$$\int_0^\infty t d\widetilde{W}_q(t) = \frac{\rho K^*}{c\mu\delta(1-\delta)^2} \tag{13}$$

推论 6 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,

1)当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}\geqslant 1$ 时,则极限

$$\lim_{s\to\infty} W_q^s(t)=0$$

2)当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$ 时,且到达间隔时间分布 $F(t)$ 为格分布,则极限 $\lim_{s\to\infty} W_q^s(t)$ 不存在.

3)当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$ 时,且到达间隔时间分布 $F(t)$ 不为格分布时,则极限

$$\lim_{s\to\infty} W_q^s(t)=\widetilde{W}_q(t)=1-\rho e^{-\mu(1-\delta)t},\quad t\geqslant 0 \tag{14}$$

存在,且与初始条件无关,其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z=\int_0^\infty e^{-\mu(1-z)t}dF(t)$ 在(0,1)内的惟一解,故在平衡下,任意时刻到达不需等待的概率为

$$\widetilde{p}=\widetilde{W}_q(0)=1-\rho \tag{15}$$

而平均虚等待时间为

$$\int_0^\infty t d\widetilde{W}_q(t)=\frac{\rho}{\mu(1-\delta)} \tag{16}$$

§4 忙 期

在本节中,我们只讨论 $c=1$,即 $GI/M/1/\infty$ 排队系统的忙期,为此,先介绍如下引理.

引理 1[9,p125] 若

1) $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$, $|u|<1$;或

2) $\mathscr{R}(s)>0$, $|u|\leqslant 1$;或

3) $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$, $|u|\leqslant 1$,且 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$,

则方程

$$z=uf(s+\mu(1-z))$$

在单位圆 $|z|<1$ 内有惟一解

$$z = \delta(s,u)$$

且可表示为

$$\delta(s,u) = \sum_{j=1}^{\infty} u^j \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)x} \frac{(\mu x)^{j-1}}{j!} dF^{(j)}(x) \tag{1}$$

其中 $f(s+\mu(1-z)) = \int_0^{\infty} e^{-[s+\mu(1-z)]x} dF(x)$. 进一步极限

$$\lim_{u\to 1^-} \delta(0,u) = \lim_{s\to 0^+} \delta(s,1) \begin{cases} <1, & \rho<1 \\ =1, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{u\to 1^-} \frac{d}{du}[\delta(0,u)] = \begin{cases} \rho/(\rho-1), & \rho>1 \\ \infty, & \rho=1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{d}{ds}[\delta(s,1)] = \begin{cases} 1/(\mu-\lambda), & \rho>1 \\ \infty, & \rho=1 \end{cases} \tag{4}$$

当某顾客到达时，若系统状态由 $k(k\geqslant 0)$ 上升到 $1+k$，则称从此时开始到系统状态首次由 1 下降到 0 时为止这段时间为 k **阶忙期**. 显见，0 阶忙期的起始时刻就是系统由闲期转入忙期的时刻，即忙期的开始时刻，它的终止时刻是此后系统首次由忙期转回闲期的时刻，即忙期的结束时刻. 当 $k>0$ 时，在 k 阶忙期的起始时刻之前系统就已处于忙期，在它的起始时刻，恰有 k 个顾客正在排队等待，而在它的进程中，系统始终处于忙期，直到系统首次由忙期转入闲期，k 阶忙期才结束，因此，k 阶忙期是刻画与预测系统极度繁忙程度的重要指标，是系统设计的一个依据.

对 $k\geqslant 0, m\geqslant 1$，令

$D_{k,m}(t) = P\{k$ 阶忙期长度 $\leqslant t$，

且在此 k 阶忙期中共服务完 m 个顾客$\}$

且

$$d_{k,m}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dD_{k,m}(t)$$

定理1 对$GI/M/1/\infty$排队系统,若$\mathscr{R}(s)>0,|z|<1,0<|u|<1$,则

$$\Psi(s,z,u)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{k,m}(s)u^m z^k$$

$$=\frac{\mu}{z-f(s+\mu(1-uz))}\left\{uz\frac{1-f(s+\mu(1-uz))}{s+\mu(1-uz)}\right.$$

$$\left.-f(s+\mu(1-uz))\frac{u-\delta(s,u)}{s+\mu[1-\delta(s,u)]}\right\} \tag{5}$$

其中$z=\delta(s,u)$为方程$z=uf(s+\mu(1-z))$在单位圆$|z|<1$内的惟一解.

证明 当$k\geqslant 0$时,由全概率定理,容易推知

$$D_{k,m+1}(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\int_0^t e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}\cdot D_{k+1-i,m+1-i}(t-x)\mathrm{d}F(x), & k<m;m\geqslant 1\\ \displaystyle\int_0^t e^{-\mu x}\frac{\mu(\mu x)^m}{m!}[1-F(x)]\mathrm{d}x, & k=m;m\geqslant 0\\ 0, & k>m;m\geqslant 0\end{cases} \tag{6}$$

取拉普拉斯一司梯阶变换,得

$$d_{k,m+1}(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left\{\int_0^{\infty}e^{-(s+\mu)x}\frac{(\mu x)^i}{i!}\mathrm{d}F(x)\right\}d_{k+1-i,m+1-i}(s), & k<m;m\geqslant 1\\ \displaystyle\int_0^{\infty}e^{-(s+\mu)x}\frac{\mu(\mu x)^m}{m!}[1-F(x)]\mathrm{d}x, & k=m,m\geqslant 0\\ 0, & k>m;m\geqslant 0\end{cases}$$

令

$$d_m(s,z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_{k,m}(s)z^k,\quad \mathscr{R}(s)>0;|z|<1$$

则

$$
\begin{aligned}
d_{m+1}(s,z) &= \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{i=0}^{k} d_{k+1-i,m+1-i}(s)\int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\frac{(\mu x)^i}{i!}dF(x)\right\}\cdot z^k \\
&\quad + z^m\int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\frac{\mu(\mu x)^m}{m!}[1-F(x)]dx \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=i}^{m-1} z^k d_{k+1-i,m+1-i}(s)\int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\frac{(\mu x)^i}{i!}dF(x) \\
&\quad + z^m\int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\frac{\mu(\mu x)^m}{m!}[1-F(x)]dx, \\
&\qquad m \geqslant 1 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

而

$$
d_1(s,z) = \frac{\mu[1-f(s+\mu)]}{s+\mu} \tag{8}
$$

再令

$$
J_k(s,u) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{k,m}(s)u^m,\quad \mathscr{R}(s) > 0;\ |u| < 1;\ k \geqslant 0
$$

则

$$
\begin{aligned}
\Psi(s,z,u) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{k,m}(s)z^k u^m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} J_k(s,u)z^k = \sum_{m=1}^{\infty} d_m(s,z)u^m \qquad (9)
\end{aligned}
$$

将式(7)两端乘以 u^m 后对 m 从 1 到∞求和，经过较复杂而并不难的计算，得

$$
\begin{aligned}
&[z-f(s+\mu(1-zu))]\Psi(s,z,u) \\
&= zud_1(s,z) + \mu zu\left[\frac{1-f(s+\mu(1-uz))}{s+\mu(1-uz)} - \frac{1-f(s+\mu)}{s+\mu}\right] \\
&\quad - f(s+\mu(1-uz))J_0(s,u) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

注意到 $d_1(s,z) = \dfrac{\mu[1-f(s+\mu)]}{s+\mu}$，代入式(10)，得

$$\Psi(s,z,u)=\frac{\mu}{[z-f(s+\mu(1-zu))]}\left\{\frac{zu[1-f(s+\mu(1-zu))]}{s+\mu(1-zu)}\right.$$

$$\left.-f(s+\mu(1-zu))J_0(s,u)\right\} \tag{11}$$

令 $uz=\tilde{z}, 0<|u|<1, |z|<1$，则式(11)可变成

$$[\tilde{z}-uf(s+\mu(1-\tilde{z}))]\Psi(s,\frac{\tilde{z}}{u},u)$$

$$=\frac{\tilde{z}u\cdot\mu[1-f(s+\mu(1-\tilde{z}))]}{s+\mu(1-z)}$$

$$-uf(s+\mu(1-\tilde{z}))\cdot J_0(s,u) \tag{12}$$

下面为了求出 $J_0(s,u)$，寻找在 $0<|u|<1, |\tilde{z}|<1$ 内使式(12)的左端等于零的点.根据引理1，知方程 $\tilde{z}=uf(s+\mu(1-\tilde{z}))$ 在单位圆 $|\tilde{z}|<1$ 内有惟一解 $\tilde{z}=\delta(s,u)$，而且 $\delta(s,u)$ 可表示为

$$\delta(s,u)=\sum_{j=1}^{\infty}u^j\int_0^{\infty}e^{-(s+\mu)x}\frac{(\mu x)^{j-1}}{j!}dF^{(j)}(x) \tag{13}$$

将 $\tilde{z}=\delta(s,u)$ 代入式(12)，得

$$J_0(s,u)=\frac{\mu[u-\delta(s,u)]}{s+\mu[1-\delta(s,u)]} \tag{14}$$

然后将式(14)代入式(11)即完成定理1的证明.

定理2 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，忙期长度的分布函数 $B(t)$ 为

$$B(t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_{0,n}(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu t}\frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{n!}\int_0^t[1-F^{(n)}(x)]dx \tag{15}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\begin{cases}1, & \rho<1\\ \frac{1}{\rho}, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{16}$$

证明 显然 $b(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dB(t)=\sum_{n=1}^{\infty}d_{0,n}(s)=J_0(s,1)$，故由

式(14)得

$$b(s)=\frac{1-\delta(s,1)}{(s/\mu)+1-\delta(s,1)} \tag{17}$$

根据拉格朗日展开定理(见附录中第八),当 $\mu=1$ 时,有

$$\frac{1-\delta(s,1)}{s+1-\delta(s,1)}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left[\frac{-s}{(s+1-x)^2}\cdot f^n(s+1-x)\right]\Bigg|_{x=0} \tag{18}$$

其中 $f(s+1-x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+1-x)t}\mathrm{d}F(t)$. 于是结合式(17),并注意到 $f^n(s+1-x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+1-x)t}\mathrm{d}F^{(n)}(t)$,得

$$B(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{n!}\int_0^t[1-F^{(n)}(x)]\mathrm{d}x,t\geqslant 0$$

而且结合引理 1,得

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{s\to 0^+}b(s)$$

$$=\lim_{s\to 0^+}\frac{1-\delta(s)}{(s/\mu)+1-\delta(s,1)}=\begin{cases}1, & \rho<1\\ \dfrac{1}{\rho}, & \rho\geqslant 1\end{cases}$$

至此定理 2 证毕.

推论 1 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,在忙期中服务 j 个顾客的概率为

$$D_j(\infty)=D_{0,j}(\infty)=\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}u^j}[J_0(0,u)]|_{u=0} \tag{19}$$

其概率母函数为

$$J_0(0,u)=\frac{u-\delta(0,u)}{1-\delta(0,u)},\quad |u|<1 \tag{20}$$

推论 2 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,忙期的平均长度

$$E[b] = \begin{cases} 1/\mu[1 - \delta(0,1)], & \rho < 1 \\ \infty, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{21}$$

而在忙期 b 内被服务完顾客的平均数为

$$E[N_b] = \begin{cases} 1/[1 - \delta(0,1)], & \rho < 1 \\ \infty, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\delta(0,1) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{j-1}}{j!} dF^{(j)}(x)$.

§5 输出过程

我们仍用 T_n^+ 表示第 n 个顾客服务完毕的离去时刻,$n \geqslant 1$,仿照第四章§5的讨论,易得到如下的一些结论:

定理 1 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,有

$$\lim_{t\to\infty} P\{T_{n+1}^+ - T_n^+ \leqslant t\} = \begin{cases} (1-\rho)\hat{F}(t) * G(t) + \rho G(t), & \rho < 1 \\ G(t), & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\hat{F}(t)$ 表示剩余到达间隔时间分布,在统计平衡下,有 $\hat{F}(t) = \lambda\int_0^t [1 - F(x)]dx$ (见参考文献[14]中的第 264 页),而 $G(t) = 1 - e^{-\mu t}, t \geqslant 0$ 为服务时间分布.

定理 2 对 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_i(t)}{t} = \begin{cases} \lambda, & \rho < 1 \\ \mu, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $M_i(t)$ 仍表示在初始条件 $N(0)=i$ 下,时间$(0,t]$内离去顾客的平均数,$i \geqslant 0$.

第六章 $GI/G/1/\infty$ 排队系统

所谓$GI/G/1/\infty$排队系统是指顾客到达的间隔时间序列$\{\tau_i, i\geqslant 1\}$独立、服从一般分布 $F(t)$，且令平均到达间隔时间为 $0<\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)$；顾客所需的服务时间序列$\{\chi_i, i\geqslant 1\}$独立、服从一般分布$G(t), t\geqslant 0$，记平均服务时间为$0<\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)$. 系统中只有一个服务台，容量为无穷大. 顾客到达时，若服务台空闲，就立即接受服务，否则就排队等待，并按到达的先后依次接受服务，服务完毕后就离开系统，而且仍假定到达与服务是彼此独立的.

该系统比前面各章所研究过的系统是更为一般的系统，讨论起来相对来讲要困难些，所得结论属定性的较多.

§1 队 长

在本节中，我们假定到达间隔时间分布函数 $F(t)$、服务时间分布函数 $G(t)$是绝对连续的，且设在初始时刻 $t=0$ 时队长 $N(0)=0$. 为讨论方便，先建立几个引理.

引理 1 若 $F_i(x)$为 x 的非降、绝对连续函数，且

$$\tilde{F}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i(x)<\infty$$

则 $\tilde{F}(x)$绝对连续，且对 x，几乎处处有

$$\tilde{F}'(x)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i'(x) \tag{1}$$

证明 由富比尼(Fubini)逐项微分定理即得式(1). 又由于 F_i

(x)非降，$F_i'(x)\geqslant 0$，故式(1)的右端可逐项积分. 将式(1)两端积分并利用$F_i(x)$的绝对连续性，即得

$$\int_0^x \widetilde{F}'(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^x F_i'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) = \widetilde{F}(x) \tag{2}$$

根据绝对连续的定义，式(2)表明$F(x)$是绝对连续的.

记$\sigma_i=\tau_i-\chi_i, i\geqslant 1$，且对$x\geqslant 0$，令

$$F_i(x) = P\{\sigma_1 \leqslant 0, \sigma_1+\sigma_2 \leqslant 0, \cdots, \sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}\leqslant 0,$$
$$\sigma_1+\cdots+\sigma_i > 0, \tau_1+\cdots+\tau_i \leqslant x\}, \quad i\geqslant 1 \tag{3}$$

引理 2 对$x\geqslant 0$，有

1) $F_i(x)$是x的绝对连续函数，$i\geqslant 1$；

2) 函数$\widetilde{F}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i(x)$是$x$的绝对连续函数，且$\widetilde{F}(0)=0$.

证明 1)对每个$i\geqslant 1$，$F_i(x)$可表示成

$$F_i(x) = \int\cdots\int_{0\leqslant \tau_1+\cdots+\tau_i\leqslant x} I\{\sigma_1\leqslant 0, \sigma_1+\sigma_2\leqslant 0, \cdots,$$
$$\sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}\leqslant 0, \sigma_1+\cdots+\sigma_i>0\}$$
$$\cdot \mathrm{d}F(t_1,\cdots,t_i,u_1,\cdots,u_i) \tag{4}$$

其中$F(t_1,\cdots,t_i,u_1,\cdots,u_i)$为$(\tau_1,\cdots,\tau_i,\chi_1,\cdots,\chi_i)$的联合分布函数，$i\geqslant 1$；$I\{\cdot\}$表示集$\{\cdot\}$上的示性函数，即在集$\{\cdot\}$上取值为1，而在其它处取值为0.

由于$\{\tau_i, i\geqslant 1\}$与$\{\chi_i, i\geqslant 1\}$是相互独立的，各自也为独立序列，且到达间隔时间分布函数$F(x)$与服务时间分布函数$G(x)$均假定为绝对连续的，故式(4)可写成

$$F_i(x) = \int\cdots\int_{0\leqslant \tau_1+\cdots+\tau_i\leqslant x} I\{\sigma_1\leqslant 0, \sigma_1+\sigma_2\leqslant 0, \cdots, \sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}\leqslant 0,$$
$$\sigma_1+\cdots+\sigma_i>0\}\cdot F'(t_1)$$

$$\cdots F'(t_i)\cdot G'(u_1)\cdots G'(u_i)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_i\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_i,\quad i\geqslant 1 \tag{5}$$

由于被积函数是可积的，因此，由绝对连续函数的定义知 $F_i(x)$ 是绝对连续的，$i\geqslant 1$.

2）由式(5)即知 $F_i(0)=0$，因而 $\widetilde{F}(0)=0$.

显然

$$\widetilde{F}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P\{\sigma_1\leqslant 0,\sigma_1+\sigma_2\leqslant 0,\cdots,\sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}\leqslant 0,$$
$$\sigma_1+\cdots+\sigma_i>0,\tau_1+\cdots+\tau_i\leqslant x\}$$
$$\leqslant 1$$

且 $F_i(x)$ 为 x 的非降函数，因而由引理 1 知 $\widetilde{F}(x)$ 绝对连续.



引理 3 设 $F_1(x),F_2(x),\cdots,F_m(x)$ 是 $m(m\geqslant 2)$ 个概率分布函数，若其中之一是绝对连续的，则其卷积 $F_1(x)*F_2(x)*\cdots*F_m(x)$ 也是绝对连续的.

证明 显然只需考虑 $m=2$ 的情形. 不妨设 $F_1(x)$ 绝对连续，因此

$$F_1(x)*F_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x-u)\mathrm{d}F_2(u)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}F_1'(t-u)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F_2(u) \tag{6}$$

由于 $F_1(x)$ 为概率分布函数，其微商 $F_1'(t-u)\geqslant 0$，因而由富比尼定理，积分次序可交换，于是

$$F_1(x)*F_2(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}F_1'(t-u)\mathrm{d}F_2(u)\right]\mathrm{d}t \tag{7}$$

此式左端 $<\infty$，因而右端被积函数为 t 的可积函数，由此可见 $F_1(x)*F_2(x)$ 为绝对连续.



定理 1 对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，令 $p_k(t)=P\{N(t)=k\}$，若 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，则极限

$$\lim_{t\to\infty}p_k(t)=p_k,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

存在，且 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

证明 令 R 为"一个顾客到达并发现服务台空着"这一事件，再令 R 的相继发生时刻为 $r_1, r_2, \cdots$ 则易知 $r_1, r_2-r_1, r_3-r_2, \cdots$ 相互独立，$\{r_{m+1}-r_m, m\geqslant 1\}$ 具有相同分布，且 $r_1, r_2-r_1, r_3-r_2, \cdots$ 的分布为

$$F(x) = P\{r_1 \leqslant x\}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(x) &= P\{r_{m+1} - r_m \leqslant x\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{\sigma_1 \leqslant 0, \sigma_1 + \sigma_2 \leqslant 0, \cdots, \sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1} \leqslant 0, \\ &\qquad \sigma_1 + \cdots + \sigma_i > 0, \tau_1 + \cdots + \tau_i \leqslant x\}\end{aligned} \tag{9}$$

显见以概率 1 有

$$r_{m+1} - r_m \leqslant \text{包括在其中的忙期长度} + \text{其中最后的一个到达间隔}$$

因此

$$E[r_{m+1} - r_m] \leqslant \text{忙期的平均长度} + \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

当 $\rho<1$ 时，忙期的平均长度$<\infty$（见参考文献[9]中的第 205 页），因此

$$E[r_{m+1} - r_m] = \int_0^{\infty} x \mathrm{d}\widetilde{F}(x) < \infty \tag{11}$$

现令

$$\varphi_k(t) = P\{N(t + r_m) = k, r_{m+1} - r_m > t\}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$C_k(t) = P\{N(t) = k, r_1 > t\}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

易知

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) = 1 - \widetilde{F}(t) \tag{12}$$

$\{r_1, r_{m+1} - r_m, m \geqslant 1\}$ 对应的更新函数为

$$M(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{F}^{(m-1)}*F(t) \tag{13}$$

若令 $r_0=0$，则

$$\begin{aligned}
p_k(t) &= P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}P\{N(t)=k, r_m\leqslant t<r_{m+1}\} \\
&= P\{N(t)=k, r_1>t\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t P\{N(t)=k, r_{m+1}-r_m>t-x\,|_{r_m=x}\}\mathrm{d}P\{r_m\leqslant x\} \\
&= C_k(t) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t P\{N(t-x+r_m) \\
&\quad = k, r_{m+1}-r_m>t-x\}\mathrm{d}P\{r_m\leqslant x\} \\
&= C_k(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t \varphi_k(t-x)\mathrm{d}[\widetilde{F}^{(m-1)}(x)*F(x)]
\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $P\{r_m\leqslant x\}=P\{r_1+(r_2-r_1)+\cdots+(r_m-r_{m-1})\leqslant x\}=\widetilde{F}^{(m-1)}(x)*F(x), \widetilde{F}^{(0)}(x)=1, x\geqslant 0$。

再由 $F(x)$的绝对连续性，据引理 3，所有 $\widetilde{F}^{(m-1)}(x)*F(x)$ 对 x 绝对连续、且非降，$m\geqslant 1$，故几乎处处有 $[\widetilde{F}^{(m-1)}(x)*F(x)]'$ 存在，因而结合引理 1，得

$$p_k(t)=C_k(t)+\int_0^t \varphi_k(t-x)\mathrm{d}M(x) \tag{15}$$

下面验证满足 Smith 关键更新定理（见附录中第七）的条件：

1）$|\varphi_k(t)|\leqslant 1$ 显然成立；

2）由于 $0\leqslant\varphi_k(t)\leqslant 1-\widetilde{F}(t)$，所以由式(9)，得

$$0\leqslant\int_0^{\infty}\varphi_k(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\infty}[1-\widetilde{F}(t)]\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}\widetilde{F}(t)<\infty;$$

3）由 $\overline{\lim_{t\to\infty}}\varphi_k(t)\leqslant\lim_{t\to\infty}P\{r_{m+1}-r_m>t\}=0$

即知

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_k(t) = 0$$

4)由式(9)及引理 2 知 $\widetilde{F}(x)$绝对连续,$\widetilde{F}(0)=0$;

5)由式(11)知 $\int_0^\infty x\mathrm{d}\widetilde{F}(x) < \infty$.

于是

$$p_k = \lim_{t\to\infty}p_k(t) = \frac{1}{\int_0^\infty x\mathrm{d}\widetilde{F}(x)}\int_0^\infty \varphi_k(t)\mathrm{d}t$$

存在.

显然

$$\sum_{k=0}^\infty p_k = \frac{1}{\int_0^\infty x\mathrm{d}\widetilde{F}(x)}\int_0^\infty\left[\sum_{k=0}^\infty\varphi_k(t)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty x\mathrm{d}\widetilde{F}(x)}\cdot\int_0^\infty\left[1-\widetilde{F}(t)\right]\mathrm{d}t = 1$$

至此定理 1 证毕.

§2 等待时间

令 W_{q_m}为第 m 个顾客的等待时间,则易知

$$W_{q_{m+1}} = \max(W_{q_m} + \chi_m - \tau_m, 0),\quad m \geqslant 1 \tag{1}$$

记 $V_m=\chi_m-\tau_m$,则

$$W_{q_{m+1}} = \max(W_{q_m} + V_m, 0),\quad m \geqslant 1 \tag{2}$$

且易知$\{V_m, m\geqslant 1\}$为一族相互独立、同分布的随机变量,$E[|V_m|]<\infty$,其分布函数为

$$V(t) = \int_0^\infty G(t+x)\mathrm{d}F(x) \tag{3}$$

于是等待时间的分布函数为

$$W_{q_{m+1}}(t) = P\{W_{q_{m+1}} \leqslant t\}$$
$$= P\{W_{q_m} + V_m \leqslant t\}$$

$$=\int_{-\infty}^{t} W_{q_m}(t-x)\mathrm{d}V(x), \quad m \geqslant 1 \tag{4}$$

由此公式知道，只要第一个顾客的等待时间 W_{q_1} 的分布 $W_{q_1}(t)$ 已知，则由此递推即可求得所有顾客的等待时间分布. 下面讨论其极限分布.

定理 1 对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，对任何 $t \geqslant 0$，极限

$$\lim_{m \to +\infty} W_{q_m}(t) = W_q(t) \tag{5}$$

存在，有积分方程

$$W_q(t) = \int_{-\infty}^{t} W_q(t-x)\mathrm{d}V(x) \tag{6}$$

而且

1）当 $\rho=1$ 时，且 $F(t)$ 与 $G(t)$ 为定长分布时，$W_q(t) = W_{q_1}(t)$；

2）当 $\rho>1$ 时，$W_q(t)=0, t \geqslant 0$；

3）当 $\rho<1$ 时，$W_q(t)$ 为一概率分布函数.

证明 1）当 $\rho=1$ 且 $F(t)$ 与 $G(t)$ 全为定长分布时，则

$$P\{\tau_m = \chi_m = 常数\} = 1 \tag{7}$$

由式(4)即知

$$W_{q_{m+1}}(t) = W_{q_m}(t), \quad m \geqslant 1 \tag{8}$$

因此结论是显然的，但此时极限分布与初始分布有关.

2）当 $\rho \neq 1$ 时，为简单起见，假定 $W_{q_1}=0$，即在初始 $t=0$ 时刻系统内无顾客. 显然

$$\begin{aligned}
W_{q_m} &= \max(0, W_{q_{m-1}} + V_{m-1}) \\
&= \max(0, V_{m-1}, W_{q_{m-2}} + V_{m-2} + V_{m-1}) \\
&= \cdots\cdots \\
&= \max(0, V_{m-1}, V_{m-1} + V_{m-2}, \cdots, V_{m-1} + V_{m-2} \\
&\qquad + \cdots + V_2, V_{m-1} + V_{m-2} + \cdots + V_1 + W_{q_1}) \\
&= \max(0, V_{m-1}, V_{m-1} + V_{m-2}, \cdots, V_{m-1} + V_{m-2} \\
&\qquad + \cdots + V_2, V_{m-1} + V_{m-2} + \cdots + V_1)
\end{aligned} \tag{9}$$

记

$$\eta_0 = 0, \eta_k = \sum_{i=1}^{k} V_i, \quad k \geqslant 1$$

则

$$W_{q_m}(t) = P\{\max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \{\eta_k\} \leqslant t\} \tag{10}$$

由于事件$\{\max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \{\eta_k\} \leqslant t\}$关于 m 为单调非增序列，因此对任意固定的 $t \geqslant 0$，$W_{q_m}(t)$关于 m 为单调非增，且有 $0 \leqslant W_{q_m}(t) \leqslant 1$，于是根据单调有界必有极限，知 $\lim\limits_{m \to \infty} W_{q_m}(t)$ 存在. 然后在式(4)两边，令 $m \to \infty$即得式(6).

显然 $W_q(t)$为 t 的非负非降的右连续函数，且当 $t<0$ 时，$W_q(t) = 0$.

若 $\rho>1$，即 $E[V_1]>0$，由强大数定律，几乎处处有

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\eta_m}{m} = E[V_1] > 0 \tag{11}$$

即

$$\lim_{m \to \infty} P\left\{\frac{\eta_m}{m} = E[V_1]\right\} = 1$$

于是，对足够大的 m，几乎处处有

$$\eta_m > \frac{1}{2} m E[V_1] > 0 \tag{12}$$

故对任意 $t \geqslant 0$，

$$\begin{aligned} 1 &= P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} (\eta_m > \frac{1}{2} m E[V_1])\right\} \\ &= \lim_{k \to \infty} P\left\{\bigcap_{m=k}^{\infty} (\eta_m > \frac{1}{2} m E[V_1])\right\} \\ &\leqslant P\{\operatorname{Sup}_{m \geqslant 0} \eta_m > t\} = 1 - W_q(t) \end{aligned}$$

因此，当 $\rho>1$ 时，$W_q(t) = 0$ 对任意 t 成立.

若 $\rho<1$，即 $E[V_1]<0$，仍由强大数定律，几乎处处有

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\eta_m}{m} = E[V_1] < 0$$

即

$$\lim_{m\to\infty}P\left\{\frac{\eta_m}{m}=E[V_1]\right\}=1 \tag{13}$$

于是，对足够大的 m，几乎处处有

$$\eta_m<0 \tag{14}$$

即

$$\begin{aligned}1&=P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}(\eta_m<0)\right\}\\&=\lim_{k\to\infty}P\left\{\bigcap_{m=k}^{\infty}(\eta_m<0)\right\}\end{aligned}$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 k_0，使得

$$P\left\{\bigcap_{m=k_0}^{\infty}(\eta_m<0)\right\}>1-\frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

另一方面，由于

$$P\{V_m\leqslant t\}=V(t)=\int_0^{\infty}G(t+x)\mathrm{d}F(x)$$

为概率分布函数，从而 $P\{\eta_m\leqslant t\}$ 也为概率分布函数($m\geqslant1$)，于是对上面固定的 k_0，存在 $t_0>0$，使得当 $t>t_0$ 时，有

$$P\left\{\bigcap_{m=0}^{k_0-1}(\eta_m\leqslant t)\right\}>1-\frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

结合式(15)与式(16)，知对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $t_0>0$，当 $t>t_0$ 时，有

$$\begin{aligned}W_q(t)&\geqslant P\left\{\bigcap_{m=0}^{\infty}(\eta_m\leqslant t)\right\}\\&=P\left\{\bigcap_{m=0}^{k_0-1}(\eta_m\leqslant t)\right\}+P\left\{\bigcap_{m=k_0}^{\infty}(\eta_m\leqslant t)\right\}\\&\quad-P\left\{\left[\bigcap_{m=0}^{k_0-1}(\eta_m\leqslant t)\right]\cup\left[\bigcap_{m=k_0}^{\infty}(\eta_m\leqslant t)\right]\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

又

$$P\left\{\bigcap_{m=k_0}^{\infty}(\eta_m\leqslant t)\right\}\geqslant P\left\{\bigcap_{m=k_0}^{\infty}(\eta_m<0)\right\} \tag{18}$$

故对任意 $\varepsilon>0$，当 $t>t_0$ 时，有

$$W_q(t)\geqslant1-\frac{\varepsilon}{2}+1-\frac{\varepsilon}{2}-1=1-\varepsilon \tag{19}$$

因而

$$\lim_{t\to\infty} W_q(t) = 1$$

至此定理 1 证毕.



需要说明的是，当 $\rho\neq 1$ 时，定理 1 的证明是在假定 $t=0$ 时系统内无顾客情况下完成的. 但实际上这个条件是可以去掉的，也就是说，当 $\rho\neq 1$ 时，极限分布 $W_q(t)$ 的存在是与初始条件，即初始分布无关的，而且当 $\rho=1$，且 $F(t)$ 与 $G(t)$ 不全为定长分布时，极限分布 $W_q(t)$ 也存在，并有 $W_q(t)=0$（见参考文献[9]的第 193 页）. 另外，对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，Little 公式是成立的（见参考文献[86]、[91]、[123]）.

下面作为积分方程(6)（该方程称为 Lindley **积分方程**）的一个应用，我们来推导 $M/G/1/\infty$ 排队系统中关于等待时间平稳分布的扑拉克—辛钦公式.

假定 $\rho<1$，$F(x)=1-e^{-\lambda x}$，$x\geqslant 0$，因此

$$V(x) = \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(x+t)\mathrm{d}t \tag{20}$$

对所有实数 x，定义

$$\widetilde{W}_q(x) = \int_{-\infty}^{x} W_q(x-u)\mathrm{d}V(u) \tag{21}$$

则当 $x<0$ 时，

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_q(x) &= \lambda\int_{u\leqslant x}\int_{t\geqslant 0} e^{-\lambda t} W_q(x-u)\mathrm{d}G(u+t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_{y\geqslant 0}\int_{v\geqslant x-y} e^{-\lambda(v+y-x)} W_q(y)\mathrm{d}G(v)\mathrm{d}y \\ &= c^* e^{\lambda x}\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $c^* = \lambda\int_{y\geqslant 0}\int_{v\geqslant 0} e^{-\lambda(y+v)} W_q(y)\mathrm{d}G(v)\mathrm{d}y$ 是与 x 无关的常数.

将式(21)取拉普拉斯—司梯阶变换，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\mathrm{d}\widetilde{W}_q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}W_q(x-u)\mathrm{d}V(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-su}\mathrm{d}V(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s(x-u)}\mathrm{d}W_q(x-u)$$

$$=w_q(s)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}V(x),\quad \mathscr{R}(s)>0 \tag{23}$$

其中 $w_q(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}W_q(x)$.

由于当 $x\geqslant 0$ 时，$\widetilde{W}_q(x)=W_q(x)$，且由式(22)，得

$$\int_{-\infty}^{0^-}e^{-sx}\mathrm{d}\widetilde{W}_q(x)=c^*\lambda\int_{-\infty}^{0^-}e^{-(s-\lambda)x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{c^*\lambda}{\lambda-s},\quad 0<\mathscr{R}(s)<\lambda$$

$$\int_{0^-}^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}\widetilde{W}_q(x)=\int_{0^-}^{0}e^{-sx}\mathrm{d}\widetilde{W}_q(x)+\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}W_q(x)$$

$$=W_q(0)-\widetilde{W}_q(0^-)+\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}W_q(x)$$

$$=-c^*+w_q(s)$$

由式(20)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}\mathrm{d}V(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t-sx}\mathrm{d}G(x+t)\mathrm{d}t$$

$$=\lambda\int_{0}^{\infty}e^{-(\lambda-s)t}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s(x+t)}\mathrm{d}G(x+t)$$

$$=\frac{\lambda g(s)}{\lambda-s},\quad 0<\mathscr{R}(s)<\lambda$$

其中 $g(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}G(t)$. 将上面三式代入式(23)，得

$$w_q(s)=c^*\left\{1-\frac{\lambda[1-g(s)]}{s}\right\}^{-1},\quad 0<\mathscr{R}(s)<\lambda \tag{24}$$

令 $s\to 0^+$，并注意到

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1-g(s)}{s}=-\lim_{s\to 0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[g(s)]=\frac{1}{\mu}$$

即得 $c^*=1-\rho$，于是

$$w_q(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda[1-g(s)]} \tag{25}$$

对 $0<\mathscr{R}(s)<\lambda$ 成立，再经解析开拓，即知式(25)对 $\mathscr{R}(s)>0$ 成立. 此即所求的扑拉克－辛钦公式.

§3 一些逼近结果

在排队系统的研究中，对于比较简单的系统，一般说来能够求出其数量指标的分布或均值、方差等精确结果的明显表达式，但有的表达式过于复杂，或涉及拉普拉斯－司梯阶变换、母函数的反演，计算非常复杂，不便实际应用；而对于较为复杂的系统，往往很难求出明显的表达式，因此，为了实际应用的需要，人们就从不同的角度去探索各种近似求解的途径，逐渐形成了排队系统的逼近理论. 目前处理这类问题主要有两种方法，一种是近似方法：用较简单的模型去近似复杂的模型，或用简单的随机过程去逼近复杂排队系统的基本随机过程，或利用现代计算技术，特别是利用计算机工具作数值计算；另一种方法是数字模拟（仿真）直接求数值解，其思想是把各种问题（数学、物理、工程、管理等）与适当的概率模型的某些数学特征联系起来，然后用计算机实现统计抽样求数值解，应用极为广泛. 特别是实际中那种大型、复杂的问题，无法用解析表达式描述时，模拟求其近似解尤为有效.

下面考虑 $GI/G/1/\infty$ 排队系统的一些逼近问题. 假定 $\rho<1$，且系统已处于平衡状态.

定理 1（平均等待时间的上界） 对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，当 $\rho<1$ 时，

$$E[W_q]\leqslant\lambda\frac{D[\chi]+D(\tau)}{2(1-\rho)}\tag{1}$$

其中 $D[\chi]$ 为服务时间的方差；$D[\tau]$ 为到达间隔时间的方差.

证明 对任意实数 x，定义

$$x^{+}=\max(x,0),\quad x^{-}=(-x)^{+}\tag{2}$$

则易知

$$x = x^+ - x^-, \quad x^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2 \tag{3}$$

于是

$$W_{q_{m+1}} = (W_{q_m} + V_m)^+ \tag{4}$$

其中 $V_m = \chi_m - \tau_m$，且 W_{q_m} 与 V_m 独立. 因而利用式(3)，得

$$\begin{aligned} E[W_q] &= E[(W_q + V)^+] \\ &= E[W_q + V] + E[(W_q + V)^-] \end{aligned}$$

于是

$$-E[V] = E[(W_q + V)^-] \tag{5}$$

再由式(4)，并利用式(3)及 W_{q_m} 与 V_m 的独立性，得

$$\begin{aligned} E[W_q^2] &= E[(W_q + V)^+]^2 \\ &= E[(W_q + V)^2] - E[(W_q + V)^-]^2 \\ &= E[W_q^2] + E[V^2] + 2E[W_q] \cdot E[V] \\ &\quad - E[(W_q + V)^-]^2 \end{aligned}$$

即

$$E[V^2] + 2E[W_q] \cdot E[V] = E[(W_q + V)^-]^2 \tag{6}$$

将式(6)的两端分别减去式(5)两端的平方，得

$$D[V] + 2E[W_q] \cdot E[V] = D[(W_q + V)^-]$$

即

$$E[W_q] = \lambda \cdot \frac{D[\chi] + D[\tau] - D[(W_q + V)^-]}{2(1 - \rho)} \tag{7}$$

故

$$E[W_q] \leqslant \lambda \cdot \frac{D[\chi] + D[\tau]}{2(1 - \rho)}$$



定理 2(平均等待时间的下界)　对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，当 $\rho < 1$ 时，

$$\lambda \cdot \frac{E[(V^+)^2]}{2(1 - \rho)} \leqslant E[W_q] \tag{8}$$

证明　由于 $W_q \geqslant 0$，所以 $(W_q + V)^- \leqslant V^-$，于是利用式(3)与式

(5)，得

$$\begin{aligned} D[(W_q+V)^-] &= E[(W_q+V)^-]^2 - E[(W_q+V)^-]^2 \\ &\leqslant E[(V^-)^2] - (E[V])^2 \\ &= D[V] - E[(V^+)^2] \\ &= D[\chi] + D[\tau] - E[(V^+)^2] \end{aligned} \tag{9}$$

代入式(7)，定理 2 即得证.

对于 $\rho<1$，但 $\rho\to1$（此时称系统处于**饱和状态**）及 $\rho\geqslant1$（此时称系统处于**过饱和状态**）的情况. 下面我们不加证明地给出等待时间的渐近分布，读者可见参考文献[9]中第 279 页至第 294 页的内容.

定理 3 对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，若

1) $\lim\limits_{\rho\to1^-}[\inf E(V^2)]>0$；

2) 存在 $\varepsilon_0>0$，使 $E[\chi^{2+\varepsilon_0}]$ 关于 ρ 一致有界；

3) $E[\tau^{2+\varepsilon_0}]$ 关于 ρ 一致有界，

则

$$\lim_{\rho\to1^-} P\{\lambda_0 W_q\leqslant t\} = 1-\mathrm{e}^{-t},\quad t\geqslant0 \tag{10}$$

其中 $\lambda_0=\dfrac{2E[-V]}{E[V^2]}$；$\chi$ 为服务时间；τ 为到达间隔时间；$V=\chi-\tau$.

根据式(10)，如果我们取 $\rho<1$ 但 $\rho\approx1$，则

$$\lambda_0=\frac{2(1-\rho)}{\lambda\{D[\chi]+D[\tau]+(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu})^2\}}\approx\frac{2(1-\rho)}{\lambda\{D[\chi]+D[\tau]\}}$$

因而当 $\rho<1$，且 ρ 充分接近 1 时，

$$\begin{aligned} P\{W_q\leqslant t\} &= P\{\lambda_0 W_q\leqslant\lambda_0 t\} \\ &\approx 1-\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},\quad t\geqslant0 \end{aligned} \tag{11}$$

这就是在饱和状态下平稳等待时间的渐近分布，其平均等待时间的渐近公式为

$$E[W_q]\approx\lambda\cdot\frac{D[\chi]+D[\tau]}{2(1-\rho)} \tag{12}$$

式(12)与式(1)比较,可知在饱和状态下,式(12)作为平均等待时间的上界,其误差最小.

定理 4 对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统,设 $0<\sigma^2=D[\chi-\tau]<\infty$,

1)若 $\rho=1$,则

$$\lim_{m\to\infty} P\left\{\frac{W_{q_m}}{\sigma\sqrt{m}}\leqslant t\right\} = \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{13}$$

2)若 $\rho>1$,则

$$\lim_{m\to\infty} P\left\{\frac{W_{q_m}-(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda})m}{\sigma\sqrt{m}}\leqslant t\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{14}$$

第七章　特殊排队系统

§1　串联排队系统

所谓的串联排队系统是指系统由串联的各个服务台组成，顾客必须依次通过每个台的服务才算服务结束. 例如生产流水线或装配线，工件必须通过一系列的工作站，每站执行给定的任务；身体检查必须通过一系列阶段等. 当顾客在本站服务结束后，如果发现下一站是空着的，他就马上进入并接受下一站的服务，但如果下一站是忙的，那就分两种不同的情形：1)走出本站，加入到下一站的等待队伍中(在下一站有等待的前提下)；2)停留在本站，使得本站不能对后来的顾客进行服务，直到下一站有等待空间留出为止，此时就破坏了本站的服务. 为方便，我们仅考虑由两个服务台串联组成的串联排队系统，第一种情形为两个等待空间均无限的，第二种情形为两个空间均为 1 的(即不允许排队等待).

1. 两个等待空间均无限的串联排队系统

假定输入是参数 $\lambda>0$ 的 Poisson 流，顾客到达后先由第一台服务，之后再进入第二台服务，第二台服务完后顾客就离去. 设第一台与第二台的服务相互独立，分别是参数 μ_1 和 μ_2 的负指数分布，并且与到达过程独立.

我们说系统在时刻 t 的状态 $N(t)=(i,j)$，若此时第一台前等待的顾客数与被服务的顾客数之和为 i，而第二台前等待的顾客数与被服务的顾客数之和为 j，则很容易证明 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为状态空间 $\{(i,j),i、j=0,1,2,\cdots\}$ 上的生灭过程.

令

$$p(i,j;t)=P\{N_1(t)=i,N_2(t)=j\} \tag{1}$$

其中 $N_1(t)$、$N_2(t)$分别表示在第一台、第二台的顾客数，则

$$\begin{cases} p(0,0;t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)p(0,0;t) + \mu_2\Delta t p(0,1;t) + o(\Delta t); \\ p(i,0;t+\Delta t) = \lambda\Delta t p(i-1,0;t) + (1-\lambda\Delta t - \mu_1\Delta t)p(i,0;t) \\ \qquad + \mu_2\Delta t p(i,1;t) + o(\Delta t), \quad i>0; \\ p(0,j;t+\Delta t) = \mu_1\Delta t p(1,j-1;t) + (1-\lambda\Delta t-\mu_2\Delta t)p(0,j;t) \\ \qquad + \mu_2\Delta t p(0,j+1;t) + o(\Delta t), \quad j>0; \\ p(i,j;t+\Delta t) = \lambda\Delta t p(i-1,j;t) + (1-\lambda\Delta t-\mu_1\Delta t-\mu_2\Delta t)\cdot \\ \qquad p(i,j;t) + \mu_1\Delta t p(i+1,j-1;t) \\ \qquad + \mu_2\Delta t p(i,j+1;t) + o(\Delta t), \quad i、j>0 \end{cases}$$

类似第二章§1的讨论，移项后除以 Δt，再令 $\Delta t\to 0$，即得在 $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} < 1(i=1,2)$ 下，系统的统计平衡方程

$$\begin{cases} \lambda p(0,0) = \mu_2 p(0,1) \\ (\lambda+\mu_1)p(i,0) = \lambda p(i-1,0) + \mu_2 p(i,1), \quad i>0 \\ (\lambda+\mu_2)p(0,j) = \mu_1 p(1,j-1) + \mu_2 p(0,j+1), \quad j>0 \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)p(i,j) = \lambda p(i-1,j) + \mu_1 p(i+1,j-1) \\ \qquad + \mu_2 p(i,j+1), \quad i、j>0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $p(i,j)=\lim\limits_{t\to\infty}p(i,j;t)$，$i$、$j\geqslant 0$. 于是利用正则性条件

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p(i,j) = 1 \tag{3}$$

方程(2)的解为

$$p(i,j) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^i\rho_2^j, \quad i、j\geqslant 0 \tag{4}$$

根据式(4)，第一台中等待与被服务的顾客总数为 i 的概率等于

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{\infty}p(i,j) = (1-\rho_1)\rho_1^i, \quad i\geqslant 0 \tag{5}$$

第二台中等待与被服务的顾客总数为 j 的概率等于

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{\infty}p(i,j) = (1-\rho_2)\rho_2^j, \quad j\geqslant 0 \tag{6}$$

由此可见，第一台与第二台的顾客数是独立的，它们的分布都与参数

为 λ 的 Poisson 流输入的单服务台系统的结果相同. 进一步可证明，等待空间均无限的 n 个 $M/M/1/\infty$ 型的串联排队系统与上述有类似的结果.

2. 两个等待空间均为零的串联排队系统

假定到达为参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流，各台的服务分别是参数 μ_1 和 μ_2 的负指数分布，且各台的服务是独立的，与到达过程也独立. 由于两个台均不允许排队形成，当第一个台中有一个顾客时，到来的顾客就自动离去，于是系统有如下五个状态：

(0,0)：表示系统全空闲；
(1,0)：一个顾客在第一台接受服务，第二台空闲；
(0,1)：第一台空闲，一个顾客在第二台接受服务；
(1,1)：第一、二台各有一个顾客在接受服务；
$(b,1)$：一个顾客在第二台接受服务，在第一台的顾客已服务完成，但正在等待第二台变为可用，这种情形我们称第一台处于**破坏状态**.

由于状态是有限的，易得系统统计平衡时的平衡方程组为

$$\begin{cases}\lambda p(0,0)=\mu_2 p(0,1)\\ \mu p(1,0)=\lambda p(0,0)+\mu_2 p(1,1)\\ (\lambda+\mu_2)p(0,1)=\mu_1 p(1,0)+\mu_2 p(b,1)\\ (\mu_1+\mu_2)p(1,1)=\lambda p(0,1)\\ \mu_2 p(b,1)=\mu_1 p(1,1)\end{cases}\tag{7}$$

后面四个方程相加，可得出第一个方程，因此先把 $p(0,0)$ 当作参量，解方程组(7)，再利用正则性条件即可定出 $p(0,0)$，这样各状态的平衡概率为

$$
\begin{cases}
p(1,0)=\rho_1(1+\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2})p(0,0)\\
p(0,1)=\rho_2 p(0,0)\\
p(1,1)=\dfrac{\lambda\rho_2}{\mu_1+\mu_2}p(0,0)\\
p(b,1)=\dfrac{\lambda\rho_2^2}{\rho_1(\mu_1+\mu_2)}p(0,0)\\
p(0,0)=\left[(1+\dfrac{\lambda\rho_2}{\mu_1+\mu_2})(\rho_1+\rho_2)+\dfrac{\lambda\rho_2^2}{\rho_1(\mu_1+\mu_2)}\right]^{-1}
\end{cases}
\tag{8}
$$

当 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 时，系统中服务台忙（只要一个台忙就算忙）的平均数为

$$
p(0,1)+p(1,0)+p(b,0)+2p(1,1)=\frac{4\rho^2+4\rho}{3\rho^2+4\rho+2} \tag{9}
$$

顾客到达得不到服务而损失的概率为

$$
p(1,0)+p(b,1)+p(1,1)=\frac{3\rho^2+2\rho}{3\rho^2+4\rho+2} \tag{10}
$$

其中 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$. 当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}\to\infty$ 时，系统中服务台忙的平均数趋于 $\frac{4}{3}$，因此每个台的最大利用率为 $\frac{2}{3}$（因为是两个服务台串联）.

为了提高设备的利用率和减少第一台的破坏情况出现，可以用增加第二台允许排队的长度（即增加第二台前的等待空间）来实现，例如，若允许在第二台前有一个顾客等待，其它假设不变，那么现在系统的状态为：(0,0)，(0,1)，(0,2)，(1,0)，(1,1)，(1,2)，(b,2)，其中 2 表示第二台是忙的，且有一个顾客在第二台前排队等待. 在统计平衡下的解为（$\mu_1=\mu_2$）：

$$
p(0,1)=\frac{\rho^2+4\rho}{4\rho^3+8\rho^2+9\rho+4},\quad p(0,2)=\frac{2\rho^2}{4\rho^3+8\rho^2+9\rho+4}
$$

$$
p(1,0)=\frac{\rho^3+3\rho^2+4\rho}{4\rho^3+8\rho^2+9\rho+4},\quad p(1,1)=\frac{\rho^3+2\rho^2}{4\rho^3+8\rho^2+9\rho+4}
$$

$$p(1,2) = p(b,2) = \frac{\rho^3}{4\rho^3 + 8\rho^2 + 9\rho + 4}$$

$$p(0,0) = \frac{4 + \rho}{4\rho^3 + 8\rho^2 + 9\rho + 4}$$

此时，当 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \to \infty$ 时，系统中服务台忙的平均数趋于 $\frac{6}{4}$，故各个台的最大利用率为 $\frac{3}{4}$，这比第二台前不允许有排队等待的情形提高 $\frac{1}{12}$.

§2　有优先权的排队系统

在通信系统、电子对抗系统、计算机的中断系统中，某些"顾客"类必须获得优先服务，这种排队系统称为**有优先权的排队系统**. 在具有优先权的排队系统中，具有较高优先权的顾客先于具有较低优先权的顾客获得服务，而不管他们进入系统时间的先后次序. 具有优先权的排队系统存在两种基本情形：**强拆（占）与非强拆（占）型排队系统**. 在**强拆**情形下，当一个顾客正在接受服务时，一个具有较高优先权的顾客到达，则立即中止正在进行的服务工作，直接服务新到来的顾客（设同类优先权的顾客按先到先服务规则）；在**非强拆**情形下，当一个具有较高优先权的顾客到达时，即使正在接受服务的顾客具有较低优先权，新到的顾客必须等待正在接受服务的顾客服务完成才能被服务. 对强拆型，又进一步分为**强拆继续与强拆重复排队系统**，若被中断服务的顾客，已服务过的时间有效，再次接受服务时，从中止点继续进行服务，则称为**强拆继续排队系统**；若已服务过的时间无效，再次接受服务时，顾客从头重新开始接受服务，则称为**强拆重复排队系统**.

对具有优先权的排队系统，分析起来比相应无优先权的排队系统要困难些，但在考虑排队系统的费用模型及最优设计中，优先权的考虑是极其重要的. 下面我们只考虑强拆型的 $M/M/1/\infty$ 优先权排

队系统，而较为一般的优先权排队系统分析，读者可参见参考文献[69].

假定有两类顾客输入，第一类、第二类独立地分别按参数 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 流到达. 两类顾客的服务时间分别遵从参数为 μ_1 和 μ_2 的负指数分布，且第一类有强拆型的优先权，到达与服务是相互独立的. 由于服务时间是负指数分布，因此下面的分析对强拆继续型和强拆重复型的系统，其结果都是一样的.

我们说系统在时刻 t 的状态 $N(t)=(i,j)$，若此时系统中有 i 个第一类顾客和 j 个第二类顾客. 容易证明 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为生灭过程. 令

$$p(i,j;t) = P\{N(t) = (i,j)\}$$

则当 $\rho_1+\rho_2=\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}<1$ 时，有平衡方程

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)p(0,0) = \mu_1 p(1,0) + \mu_2 p(0,1) \\ (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)p(i,0) = \lambda_1 p(i-1,0) + \mu_1 p(i+1,0), \quad i>0 \\ (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)p(0,j) = \lambda_2 p(0,j-1) + \mu_1 p(1,j) \\ \qquad\qquad + \mu_2 p(0,j+1), \quad j>0 \\ (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)p(i,j) = \lambda_1 p(i-1,j) + \lambda_2 p(i,j-1) \\ \qquad\qquad + \mu_1 p(i+1,j), \quad i、j>0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p(i,j)=\lim\limits_{t\to\infty}p(i,j;t), \quad i,j\geqslant 0$.

为解方程组(1)，引入母函数：

$$\Psi_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p(i,j)z^j, \quad |z|<1, i\geqslant 0 \tag{2}$$

$$\Psi(u,z) = \sum_{i=0}^{\infty}\Psi_i(z)u^i = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p(i,j)u^i z^j, \quad |u|<1, |z|<1 \tag{3}$$

式(1)中第三个方程两边乘以 z^j，然后对 j 从1到∞求和，再加上第一个方程，经整理得

$$\left[\lambda_1+\lambda_2(1-z)+\mu_2(1-\frac{1}{z})\right]\Psi_0(z)$$

$$=\mu_1\Psi_1(z)+\mu_2(1-\frac{1}{z})p(0,0) \tag{4}$$

式(1)第四个方程两边乘以 z^j，然后对 j 从 1 到∞求和，再加上第二个方程，经整理得

$$[\lambda_1+\lambda_2(1-z)+\mu_1]\Psi_i(z)=\lambda_1\Psi_{i-1}(z)+\mu_1\Psi_{i+1}(z),\quad i\geqslant 1 \tag{5}$$

用 u^i 乘式(5)的两端，对 i 从 1 到∞求和，再加式(4)，经整理得

$$\Psi(u,z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{[\mu_1(1-u)z-\mu_2(1-z)u]\Psi_0(z)+\mu_2(1-z)up(0,0)}{\lambda_1u^2-[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]u+\mu_1} \tag{6}$$

上式分母

$$\lambda_1u^2-[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]u+\mu_1 \tag{7}$$

在 $|u|<1$ 内有惟一零点 $u=\omega(z)$. 事实上，在 $|u|=1$ 上，有

$$\begin{aligned}|\lambda_1u^2+\mu_1| &\leqslant\lambda_1+\mu_1<\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)\text{ 的实部}\\ &\leqslant|\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)|\\ &=|[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]u|,\quad |z|<1\end{aligned}$$

因而由复变函数中的儒歇定理，$\lambda_1u^2+\mu_1-[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]u$ 与 $[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]u$ 在 $|u|<1$ 内有相同个数的零点，即式(7)在 $|u|<1$ 内有惟一解 $u=\omega(z)$.

把式(7)在单位圆外，即 $|u|\geqslant 1$ 的根记为 $u=\omega_0(z)$，则

$$\omega(z)=\frac{\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)-\sqrt{[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]^2-4\lambda_1\mu_1}}{2\lambda_1} \tag{8}$$

$$\omega_0(z)=\frac{\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)+\sqrt{[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-z)]^2-4\lambda_1\mu_1}}{2\lambda_1} \tag{9}$$

由于 $u=\omega(z)$ 为式(6)分母的零点，而 $\Psi(u,z)$ 在 $|u|<1,|z|<1$ 内收敛，故 $u=\omega(z)$ 必为式(6)的分子的零点，代入分子，即得

$$\Psi_0(z) = \frac{\mu_2(1-z)\omega(z)p(0,0)}{\mu_1 z[1-\omega(z)] - \mu_2(1-z)\omega(z)} \tag{10}$$

将此式代入式(6)，并注意分母可表示为

$$\lambda_1 u^2 - [\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2(1-z)]u + u_1 = \lambda_1[u-\omega(z)][u-\omega_0(z)] \tag{11}$$

即得

$$\Psi(u,z) = \frac{\mu_1\mu_2(1-z)p(0,0)}{\lambda_1[u-\omega_0(z)]\{\mu_1 z[1-\omega(z)] - \mu_2(1-z)\omega(z)\}} \tag{12}$$

由式(8)和式(9)可得

$$\omega(1) = 1,\quad \omega_0(1) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{1}{\rho_1} > 1$$

而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\omega(z)]\Big|_{z=1} = \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1}$$

于是将式(12)两端取极限 $u\to 1, z\to 1$，利用洛必达法则，有

$$1 = \frac{\mu_1\mu_2 p(0,0)}{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}$$

因而

$$p(0,0) = 1 - \rho_1 - \rho_2 \tag{13}$$

代入式(12)，并注意 $\omega(z)\cdot\omega_0(z) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} = \dfrac{1}{\rho_1}$，即得 $\Psi(u,z)$ 的最终表达式

$$\Psi(u,z) = \frac{(1-\rho_1-\rho_2)(1-z)\omega(z)}{[\rho_1 u\omega(z) - 1]\left\{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}[1-\omega(z)]z - (1-z)\omega(z)\right\}} \tag{14}$$

通过母函数的反演可求得 $\{p(i,j), i,j\geqslant 0\}$.

令 $p_{i\cdot}$ 与 $p_{\cdot j}$ 分别表示系统中有 i 个第一类顾客与 j 个第二类顾

客的概率，而它们的概率母函数分别为 $\Psi(u,1)$ 与 $\Psi(1,z)$. 于是在在式(14)中令 $z\to 1$，使用洛必塔法则，得

$$\Psi(u,1)=\frac{1-\rho_1}{1-\rho_1 u}=\sum_{i=0}^{\infty}(1-\rho_1)\rho_1^i u^i \tag{15}$$

因而

$$p_{i\cdot}=(1-\rho_1)\rho_1^i,\quad i\geqslant 0 \tag{16}$$

这结果与只有一类以 λ_1 为参数的 Poisson 流输入、服务时间是参数 μ_1 的负指数分布的单服务台等待制 $M/M/1/\infty$ 系统的结果相同，也就是说，第二类顾客的存在对具有强拆优先权的第一类顾客来说不发生任何影响.

另外，

$$\Psi(1,z)=\frac{(1-\rho_1-\rho_2)(1-z)\omega(z)}{[\rho_1\omega(z)-1]\left\{\frac{\mu_1}{\mu_2}[1-\omega(z)]z-(1-z)\omega(z)\right\}} \tag{17}$$

与上述情况不同，第一类顾客的存在对系统中第二类顾客数目的分布是有影响的. 此时式(17)对 z 求导，然后令 $z=1$，即可求得第二类顾客的平均数

$$\sum_{j=0}^{\infty}jp_{\cdot j}=\frac{\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}\left[1+\frac{\mu_2\rho_1}{\mu_1(1-\rho_1)}\right] \tag{18}$$

§3 成批到达的 $M^X/G/1/\infty$ 排队系统

考虑这样的成批到达系统：1)到达间隔序列 $\{\tau_i, i\geqslant 1\}$ 独立、同参数 λ 的负指数分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t}, t\geqslant 0$，即批与批之间的到达是参数 λ 的 Poisson 流，但在每一到达时刻不是到来一个顾客，而是到来一批顾客，每批顾客的数目为一个随机变量 ξ，且 $P\{\xi=k\}=a_k$，$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot a_k=\alpha<\infty$；2)服务是单个进行的，顾客所需的服务时间序列 $\{\chi_i, i$

$\geqslant 1\}$独立、同一般分布 $G(t),t\geqslant 0$，记平均服务时间为 $0<\dfrac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)<\infty$；3)系统中只有一个服务台，容量为无穷大，顾客到达时，若服务台空闲就立即接受服务，否则就排队等待. 在同批到达的顾客中，服务顺序是任意的，在不同批到达的顾客中，服务顺序仍按先到先服务的规则，而且仍假定到达与服务是彼此独立的.

对于这样的成批到达系统，仍令 b 表示从一个顾客开始的系统忙期，且设

$$B(t)=P\{b\leqslant t\},\quad b(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}B(t)$$

定理 1 对 $M^X/G/1/\infty$ 成批到达系统，若 $\mathscr{R}(s)>0$，则 $b(s)$ 为方程

$$z=g(s+\lambda-\lambda A(z)) \tag{1}$$

在 $|z|<1$ 内的惟一解，而且

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{s\to 0^+}b(s)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1\\ \omega<1, & \rho>1\end{cases} \tag{2}$$

$$E[b]=\begin{cases}1/(\mu-\lambda\alpha), & \rho<1\\ \infty, & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{3}$$

其中，$\rho=\dfrac{\lambda\alpha}{\mu}$；$A(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}z^k\alpha_k$；$\omega$ 是方程 $z=g(\lambda-\lambda A(z))$ 在(0，1)内的最小非负实根；$g(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}G(t)$.

证明 注意到是成批到达，完全类似第四章§4 中定理 1 的推证.

▒

定理 2 对 $M^X/G/1/\infty$ 成批到达系统，若 $\mathscr{R}(s)>0$，则

$$q_1^*(s) = \frac{b(s)[1 - g(s+\lambda)]}{(s+\lambda)g(s+\lambda)} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
q_j^*(s) = & \frac{b(s)}{g(s+\lambda)} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{m[i]=j-1} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_i} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \overline{G}(t) \frac{(\lambda t)^i}{i!} dt \\
& + \frac{1}{g(s+\lambda)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_{j-i}^*(s)}{b^i(s)} \cdot \Big\{ b(s) - g(s+\lambda) \\
& - \sum_{k=1}^{i} \sum_{m[k]=k}^{i} b^{m[k]}(s) \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_k} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dG(t) \Big\}, \\
& \qquad j > 1
\end{aligned} \tag{5}$$

其中，$m[k] = m_1 + \cdots + m_k$；$\sum\limits_{m[k]=j-1} = \sum\limits_{m_1=1}^{i_1} \cdots \sum\limits_{m_k=1}^{i_k}$ 且 $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = j - 1$.

证明 设 χ 表示在忙期 b 中第一个被服务顾客的服务时间，υ 表示在 χ 内到达的顾客批数，设第 i 批的顾客数为 ξ_i，$i=0,1,2,\cdots,\upsilon$. 我们把在 χ 内到达的顾客称为“第一类顾客”，在第一类顾客以后到达的顾客称为“第二类顾客”. 因为系统的忙期长度和系统中的顾客数与服务顺序无关，所以可把服务顺序重新安排如下：

首先批与批之间到达的顾客仍按先到先服务的规则依次进行服务，其次在每批中，服务按第四章§2中定理1证明中的服务顺序进行，于是忙期 b 可表示为

$$b = \chi + L_1 + \cdots + L_{\xi_1} + L_{\xi_1+1} + \cdots + L_{\xi_1+\xi_2} + \cdots + L_{\xi_1+\cdots+\xi_\upsilon} \tag{6}$$

其中 $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ 相互独立同分布，且独立于 υ 和 χ；$\{L_i, i \geqslant 1\}$ 相互独立，且独立于 $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$，独立于 υ 和 χ. 同时每个 L_i 的分布为 $B(t)$，而且当 $\upsilon=0$ 时，$\xi_1+\cdots+\xi_\upsilon=0$，$L_1+\cdots+L_{\xi_1+\cdots+\xi_\upsilon}=0$. 于是

$$\begin{aligned}
Q_j(t) = & P\{\chi + L_1 + \cdots + L_{\xi_1+\cdots+\xi_\upsilon} > t \geqslant 0; N(t) = j\} \\
= & P\{\chi > t \geqslant 0; N(t) = j\} \\
& + P\{\chi \leqslant t; \chi + L_1 + \cdots + L_{\xi_1+\cdots+\xi_\upsilon} > t \geqslant 0; \\
& \qquad N(t) = j\}
\end{aligned} \tag{7}$$

因为到达是泊松过程，所以当 χ 结束时，可以认为 $L_1+\cdots+L_{\xi_1+\cdots+\xi_\nu}$ 是一个新忙期开始，且开始时系统中有 $\xi_1+\cdots+\xi_\nu$ 个顾客，于是

$$Q_j(t)=P\{\chi>t\geqslant 0;\text{且在}(0,t]\text{内到达 } j-1 \text{ 个}\}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\cdot$$
$$P\{L_1+\cdots+L_{\xi_1+\cdots+\xi_k}>t-x;N(t-x)=j\}\mathrm{d}G(x) \tag{8}$$

由于是成批到达，所以当 $j=1$ 时，式(8)中第一项为

$$[1-G(t)]\mathrm{e}^{-\lambda t}=\overline{G}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{9}$$

当 $j>1$ 时，式(8)中第一项为

$$\sum_{i=1}^{\infty}P\{\chi>t\geqslant 0;\text{在}(0,t]\text{内到达 } i \text{ 批};\xi_1+\cdots+\xi_i=j-1\}$$
$$=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m[i]=j-1}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_i}\overline{G}(t)\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{10}$$

而且对 $j\geqslant 1$，式(8)中第二项为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=1}^{\infty}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_k}$$
$$\cdot P\{L_1+\cdots+L_{m[k]}>t-x;N(t-x)=j\}\mathrm{d}G(x) \tag{11}$$

由于每个 L_i 与忙期 b 具有相同的概率规律，且根据上面对服务顺序的重新安排，系统在时刻 $t-x$ 的顾客数等于在系统中"第一类顾客"数加上"第二类顾客"数，因此

$$P\{L_1+\cdots+L_{m[k]}>t-x;N(t-x)=j\}$$
$$=\sum_{r=1}^{m[k]}P\{L_1+\cdots+L_r>t-x;$$
$$L_1+\cdots+L_{r-1}\leqslant t-x;N(t-x)=j-m[k]+r\}$$
$$=\sum_{r=1}^{m[k]}Q_{j-m[k]+r}(t-x)*B^{(r-1)}(t-x) \tag{12}$$

其中，当 $j\leqslant 0$ 时，$Q_j(t)=0$；"$*$"表示卷积运算. 这样，当 $j=1$ 时，有

$$Q_1(t) = \overline{G}(t)e^{-\lambda t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=1}^{\infty}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_k} \cdot$$

$$\int_0^t \frac{(\lambda x)^k}{k!} Q_1(t-x) * B^{(m[k]-1)}(t-x)\mathrm{d}G(x) \tag{13}$$

取 L 变换，并注意到 $b(s)=g(\Lambda)$ 即得式(4). 其中 $\Lambda=s+\lambda-\lambda A(b(s))$.

当 $j>1$ 时，有

$$Q_j(t) = \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m[i]=j-1}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_i}\overline{G}(t)\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=1}^{\infty}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_k}\int_0^t \frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x} \cdot \tag{14}$$

$$\sum_{r=1}^{m[k]} Q_{j-m[k]+r}(t-x) * B^{(r-1)}(t-x)\mathrm{d}G(x)$$

上式取 L 变换，得

$$q_j^*(s) = \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m[i]=j-1}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_i}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}\overline{G}(t)\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{d}t$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=1}^{\infty}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_k}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}$$

$$\cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}\sum_{r=1}^{m[k]} q^*_{j-m[k]+r}(s)b^{r-1}(s)\mathrm{d}G(t) \tag{15}$$

经过交换求和的顺序和不太复杂的运算，式(15)中第二项为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}P\{\xi_1+\cdots+\xi_k=i\}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\sum_{r=1}^{i}q^*_{j-i+r}(s)b^{r-1}(s)\mathrm{d}G(t)$$

$$= \frac{q_j^*(s)}{b(s)}\{g(\Lambda)-g(s+\lambda)\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1}\frac{q^*_{j-i}(s)}{b^{i+1}(s)}\cdot\left\{g(\Lambda)-\sum_{k=0}^{i}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda A(b(s))t]^k}{k!}\mathrm{d}G(t)\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{j-1} q_{j-i}^*(s) \sum_{k=1}^{i} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{d}G(t) \cdot$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} b^{r-1}(s) P\{\xi_1 + \cdots + \xi_k = r + i\} \quad (16)$$

并注意到

$$\sum_{r=1}^{\infty} b^{r-1}(s) P\{\xi_1 + \cdots + \xi_k = r + i\}$$

$$= \frac{1}{b^{i+1}(s)} \sum_{r=1}^{\infty} b^{r+i}(s) P\{\xi_1 + \cdots + \xi_k = r + i\}$$

$$= \frac{1}{b^{i+1}(s)} \left\{ [A(b(s))]^k - \sum_{m[k]=k}^{i} b^{m[k]}(s) \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_k} \right\} \quad (17)$$

这样式(5)即得. 至此定理 2 证毕.

下面我们讨论队长的瞬态分布. 令

$$p_{ij}(t) = P\{N(t) = j |_{N(0)=i}\}$$

$$p_{ij}^*(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} p_{ij}(t) \mathrm{d}t, \quad i、j \geqslant 0$$

定理 3 对 $M^X/G/1/\infty$ 排队系统, 若 $\mathscr{R}(s) > 0$, 则

$$p_{i0}^*(s) = \frac{[1 - f(s)] b^i(s)}{s\{1 - f(s) A(b(s))\}}, \quad i \geqslant 0 \quad (18)$$

其中 $A(b(s)) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [b(s)]^k$.

证明 显然, 在时刻 t 系统中的顾客数等于零当且仅当时刻 t 处于系统闲期中, 而且由于到达是泊松过程, 所以

$$p_{00}(t) = \overline{F}(t) + P\{\tilde{\tau}_1 \leqslant t; N(t) = 0\}$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^t p_{k0}(t - x) \mathrm{d}F(x) \quad (19)$$

其中 $\tilde{\tau}_1$ 表示第一个闲期长度.

当 $i\geqslant 1$ 时，类似可得

$$p_{i0}(t)=\int_0^t p_{00}(t-x)\mathrm{d}P\{b^{<i>}\leqslant x\} \tag{20}$$

其中 $b^{<i>}$ 表示从 i 个顾客开始的忙期长度，$i\geqslant 1$. 因为到达是 Poisson 流，所以 $b^{<i>}$ 可表示为

$$b^{<i>}=b_1+b_2+\cdots+b_i,\quad i\geqslant 1$$

而且 $b_1,b_2,\cdots,b_i$ 相互独立，与忙期 b 有相同的概率分布 $B(t)$. 于是

$$p_{i0}(t)=\int_0^t p_{00}(t-x)\mathrm{d}B^{(i)}(x),\quad i\geqslant 1 \tag{21}$$

然后对式(19)和式(21)取 L 变换，经过整理即得式(18).

定理 4　对 $M^X/G/1/\infty$ 排队系统，若 $\mathscr{R}(s)>0$，则对 $i\geqslant 0$ 与 $j\geqslant 1$，有

$$p_{ij}^*(s)=\sum_{k=1}^{i}q_{j-i+k}^*(s)b^{k-1}(s)+\frac{f(s)b^i(s)}{1-f(s)A(b(s))}\left\{\frac{A(b(s))}{b(s)}q_j^*(s)+\Delta_1(s)\right\} \tag{22}$$

其中 $q_j^*(s)$ 由本节定理 2 确定，$j\geqslant 1$；$A(b(s))=\sum_{k=1}^{\infty}a_k[b(s)]^k$；$\Delta_1(s)=\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_{j-k}^*(s)}{b^{k+1}(s)}\left\{A(b(s))-\sum_{i=1}^{k}a_ib^i(s)\right\}$.

证明　因为

$$\begin{aligned}&P\{b^{<i>}>t\geqslant 0;N(t)=j\}\\&=P\{b_1+\cdots+b_i>t\geqslant 0;N(t)=j\}\\&=\sum_{k=1}^{i}Q_{j-i+k}(t)*B^{(k-1)}(t),\quad i\geqslant 1\end{aligned} \tag{23}$$

于是，使用全概率分解技术，得

$$\begin{aligned}p_{0j}(t)&=P\{\tilde{\tau}\leqslant t;N(t)=j\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^t p_{kj}(t-x)\mathrm{d}F(x),\quad j\geqslant 1\end{aligned} \tag{24}$$

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{i} Q_{j-i+k}(t) * B^{(k-1)}(t) + \int_0^t p_{0j}(t-x)\mathrm{d}B^{(i)}(x), \quad i \geqslant 1, j \geqslant 1 \tag{25}$$

对上述两式取 L 变换，得

$$p_{0j}^*(s) = f(s)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k p_{kj}^*(s), \quad j \geqslant 1 \tag{26}$$

$$p_{ij}^*(s) = \sum_{k=1}^{i} q_{j-i+k}^*(s) b^{k-1}(s) + b^i(s) p_{0j}^*(s), \quad i \geqslant 1, j \geqslant 1 \tag{27}$$

然后将式(27)代入式(26)，并注意到这些 $q_j^*(s)=0(j\leqslant 0)$，经过整理即得式(22).

定理 5 对 $M^X/G/1/\infty$ 排队系统，令 $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} P\{N(t)=j\}, j \geqslant 0$，则对任意初始状态，有

1) 当 $\rho=\dfrac{\lambda\alpha}{\mu}\geqslant 1$ 时，$p_j=0, j\geqslant 0$；

2) 当 $\rho=\dfrac{\lambda\alpha}{\mu}<1$ 时，$\{p_j, j\geqslant 0\}$ 存在且构成概率分布，进一步有递推式：

$$p_0 = 1-\rho$$

$$p_j = \lambda(1-\rho)\left\{\theta_j + \sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\left[1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right]\right\}, \quad j > 1 \tag{28}$$

其中，$\theta_1 = \dfrac{1-g(\lambda)}{\lambda g(\lambda)}$，$g(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}G(t)$；

$$\theta_j = \frac{1}{g(\lambda)}\left\{\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m[i]=j-1}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\bar{G}(t)\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{j-1}\theta_{j-i}\left[1-g(\lambda)-\sum_{k=1}^{i}\sum_{m[k]=k}^{i}\alpha_{m_1}\cdots\alpha_{m_k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{d}G(t)\right]\right\},$$

$$j > 1$$

证明 结合定理 1 和定理 2，完全类似第四章 § 2 中定理 3 的证明. ∎

推论 1 令 $P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^{j}p_{j}$ 表示在平衡状态下队长分布的概率母函数，则

$$P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda-\lambda A(z))}{g(\lambda-\lambda A(z))-z},\quad |z|<1 \tag{29}$$

其中，$\rho=\frac{\lambda\alpha}{\mu}<1$；$A(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k}z^{k}$；$g(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}dG(t)$.

证明 注意到

$$\sum_{j=1}^{\infty}z^{j}\theta_{j}=\frac{z(1-z)\{1-g(\lambda-\lambda A(z))\}}{\lambda[1-A(z)]\{g(\lambda-\lambda A(z))-z\}}$$

及

$$\sum_{j=1}^{\infty}z^{j}\sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\left[1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i}\right]=\frac{z-A(z)}{1-z}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}z^{j}\theta_{j}\right\}$$

即可证.

∎

推论 2 在平衡状态下，系统的平均队长与平均等待队长分别为

$$\overline{N}=\rho+\frac{\lambda\alpha E[\chi^{2}]+\frac{\lambda}{\mu}(E[\xi^{2}]-\alpha)}{2(1-\rho)},\quad \rho<1 \tag{30}$$

$$\overline{N}_{q}=\frac{\lambda\alpha E[\chi^{2}]+\frac{\lambda}{\mu}(E[\xi^{2}]-\alpha)}{2(1-\rho)},\quad \rho<1 \tag{31}$$

推论 3 对 $M^{K}/M/1/\infty$ 排队系统，在平衡状态下队长分布的母函数为

$$P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z(1+\tilde{\rho})+\tilde{\rho}z^{K+1}},\quad |z|<1 \tag{32}$$

其中，$\rho=\frac{K\lambda}{\mu}<1, \tilde{\rho}=\frac{\lambda}{\mu}$，$K(\geqslant 1)$ 为正整数.

说明：$M^K/M/1/\infty$ 排队系统与 $M/E_K/1/\infty$ 排队系统是对应的（但后者顾客的服务时间服从参数为 μ 的 k 阶爱尔朗分布），也就是说，只要知道前者的性质，就能知道后者的相应性质，而参考文献[12]是采用位相分析法来讨论 $M/E_K/1/\infty$ 系统，即把顾客的服务时间分为 k 个相互独立的位相（阶段），每个位相均有参数 μ 的负指数分布，而每个顾客必须连续通过 k 个位相的服务，因此，$M/E_K/1/\infty$ 并非 k 个 $M/M/1/\infty$ 排队系统的串联. 另外，对每批到达为固定的 k 个成批到达 $GI^k/M/1/\infty$ 系统的讨论，有兴趣的读者可见参考文献[9].

§4 成批服务的 $M/M^k/1/\infty$ 排队系统

假定到达是参数 λ 的 Poisson 流，空闲的服务台当且仅当等待的顾客数不小于 k（$k\geqslant 1$ 为固定正整数）时才开始服务，每次同时服务 k 个人（同时开始服务，同时服务结束），服务时间与到达间隔独立，并遵从参数为 μ 的负指数分布，而且系统中只有一个服务台，容量为无穷大，我们称这样的排队系统为成批服务的 $M/M^k/1/\infty$ 排队系统.

我们说系统在时刻 t 的状态 $N(t)=j$，若 $j<k$，则表示服务台空着（但系统未必没有顾客），而有 j 个顾客正在等待；若 $j\geqslant k$，则表示有 k 个正在被服务，同时有 $j-k$ 个顾客还在等待. 令

$$p_j(t)=P\{N(t)=j\},\quad j=0,1,2,\cdots$$

则易知 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一连续时间参数的马尔柯夫过程，因而与第一章§6同样处理，可列出 $(t,t+\Delta t]$ 内状态转移的方程组：

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)p_0(t) + \mu\Delta t p_k(t) + o(\Delta t) \\ p_j(t+\Delta t) = \lambda\Delta t p_{j-1}(t) + (1-\lambda\Delta t)p_j(t) \\ \qquad\qquad + \mu\Delta t p_{k+j}(t) + o(\Delta t), \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ p_j(t+\Delta t) = \lambda\Delta t p_{j-1}(t) + (1-\lambda\Delta t - \mu\Delta t)p_j(t) \\ \qquad\qquad + \mu\Delta t p_{k+j}(t) + o(\Delta t), \quad j \geqslant k \end{cases} \tag{1}$$

这里要注意：由于服务是以 k 人为一批来进行服务的，因此，每当服务完一次时，状态转移从 $k+j$ 到 j.

将式(1)移项后除以 Δt，再令 $\Delta t \to 0$ 即得微分差分方程组：

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_k(t) \\ p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t) + \mu p_{k+j}(t), \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda+\mu)p_j(t) + \mu p_{k+j}(t), \quad j \geqslant k \end{cases} \tag{2}$$

根据马尔柯夫过程的极限理论(见参考文献[68])，极限

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t), \quad j = 0,1,2,\cdots$$

存在，与初始条件无关，而且或者 $p_j = 0(j \geqslant 0)$，或 $p_j > 0(j \geqslant 0)$，且 $\{p_j, j \geqslant 0\}$ 构成概率分布.

由式(2)，令 $t \to \infty$，得方程组：

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_k \\ \lambda p_j = \lambda p_{j-1} + \mu p_{k+j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ (\lambda+\mu)p_j = \lambda p_{j-1} + \mu p_{k+j}, \quad j \geqslant k \end{cases} \tag{3}$$

假定

$$\rho = \frac{\lambda}{k\mu} < 1 \tag{4}$$

则所有 $p_j > 0$(最后将证明此结论成立).

在条件 $\rho = \dfrac{\lambda}{k\mu} < 1$ 下，为了解方程组(3)，引入队长分布的母函数：

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j p_j, \quad |z| \leqslant 1 \tag{5}$$

然后将式(3)两端分别乘以 z^j 后对 j 求和，经过整理，即得

$$P(z)=\frac{\mu(1-z^k)\sum_{j=0}^{k-1}z^j p_j}{\lambda z^{k+1}-(\lambda+\mu)z^k+\mu} \tag{6}$$

若能求出 $p_0,p_1,\cdots,p_{k-1}$,$P(z)$就完全确定.下面分几步讨论:

1)证明式(6)的分母

$$\mathcal{J}(z)=\lambda z^{k+1}-(\lambda+\mu)z^k+\mu \tag{7}$$

在单位圆$|z|\leqslant 1$内恰好有 k 个根,其中一个根为 1.

我们指出,当 $\epsilon>1$ 而充分接近于 1 时,有

$$\lambda\epsilon^{k+1}+\mu<(\lambda+\mu)\epsilon^k \tag{8}$$

事实上,因为两端当 $\epsilon=1$ 时相等,而由假设(4),在 $\epsilon=1$ 处左端导数 $(k+1)\lambda<$右端导数 $k(\lambda+\mu)$.

因此由式(8),可推知在$|z|=\epsilon>1$(ϵ 为充分接近于 1 的任意数)时,

$$|\lambda z^{k+1}+\mu|\leqslant\lambda\epsilon^{k+1}+\mu<(\lambda+\mu)\epsilon^k=|(\lambda+\mu)z^k|$$

故由儒歇定理,$\lambda z^{k+1}+\mu-(\lambda+\mu)z^k$ 与$(\lambda+\mu)z^k$ 在 $|z|<\epsilon(\epsilon>1)$ 内有相同个数的零点,即式(7)在$|z|<\epsilon$ 内恰有 k 个根.由于 ϵ 可任意接近于 1,故所证的前部分成立.后部分成立是显然的(将 $z=1$ 代入验证即可).

2)令$\mathcal{J}(z)$在单位圆$|z|\leqslant 1$ 内的根为 $z_1,\cdots,z_{k-1},z_k=1$.证明其余 $k-1$ 个根 $z_j\neq 1(j=1,2,\cdots,k-1)$.

事实上只须证明 $z_k=1$ 为单根.而由

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(z)}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=1}=(k+1)\lambda-k(\lambda+\mu)=\lambda-k\mu\neq 0$$

即得.

3)证明 $z_1,\cdots,z_{k-1}$都不是 $1-z^k$ 的根.

用反证法.若对 $1\leqslant j\leqslant k-1$,有

$$z_j^k=1$$

由

$$\mathcal{J}(z_j) = \lambda z_j^{k+1} - (\lambda + \mu) z_j^k + \mu = 0$$

得

$$\lambda z_j - (\lambda + \mu) + \mu = 0$$

即 $\qquad z_j = 1$

此与2)矛盾.

4)导出 $P(z)$ 的最终表达式.

由于 $P(z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 内收敛，因而式(6)分母在 $|z| \leqslant 1$ 内的零点 $z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k = 1$ 都必为分子的零点，$z_k = 1$ 显然为 $1 - z_k$ 的零点，又由3)，$z_1, \cdots, z_{k-1}$ 必为 $\sum_{j=0}^{k-1} p_j z^j$ 的零点，因此

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_j z^j = A \prod_{j=1}^{k-1} (z - z_j) \tag{9}$$

其中 A 为待定常数.

又式(7)为 $k+1$ 阶多项式，故除了 $|z| \leqslant 1$ 内恰好有 k 个零点外，必有惟一零点 z_0 在单位圆外：$|z| > 1$，所以可将式(7)写成：

$$\mathcal{J}(z) = \lambda z^{k+1} - (\lambda + \mu) z^k + \mu = \lambda \prod_{j=0}^{k} (z - z_j) \tag{10}$$

将式(9)与式(10)代入式(6)，并注意到 $z_k = 1$，得

$$P(z) = \frac{A\mu \sum_{j=0}^{k-1} z^j}{\lambda (z_0 - z)} \tag{11}$$

将 $z=1$ 代入上式，由于有 $p_j > 0$，因而 $\{p_j, j \geqslant 0\}$ 构成概率分布，故

$$1 = P(1) = \frac{Ak\mu}{\lambda(z_0 - 1)}$$

于是

$$A = \frac{\lambda(z_0 - 1)}{k\mu} = \rho(z_0 - 1)$$

这样

$$P(z) = \frac{(z_0 - 1)}{k(z_0 - z)} \sum_{j=0}^{k-1} z^j \tag{12}$$

其中 z_0 为式(7)的多项式在单位圆外惟一的零点. 由于实系数多项式的复根共轭存在，故 z_0 必为实根. 于是可将式(12)改写成

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-1)(1-z^k)z^n}{kz_0^{n+1}(1-z)}$$

比较 z^n 的系数，即得

$$p_n=\begin{cases}\dfrac{z_0^{n+1}-1}{kz_0^{n+1}}, & n=0,1,\cdots,k-1\\[2ex] \dfrac{z_0^k-1}{kz_0^{n+1}}, & n=k,k+1,\cdots\end{cases}\tag{13}$$

而且系统中的平均顾客数为

$$\begin{aligned}\bar{N}&=\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[P(z)]|_{z=1}\\&=\frac{(k-1)(z_0-1)+2}{2(z_0-1)}\end{aligned}\tag{14}$$

下面来证明在 $\rho=\dfrac{\lambda}{k\mu}<1$ 条件下，所有 $p_j>0, j=0,1,2,\cdots$ 事实上，我们只要考虑时刻 $t=0,\Delta t,2\Delta t,\cdots$ 所对应的离散时刻马尔柯夫链，易知它是不可约、非周期的，因而可以利用第五章 §1 中引理 1，该处的方程组 $\sum\limits_i x_ip_{ij}=x_j, j=0,1,2,\cdots$，即现在的式(3). 由于我们已经找出了式(3)的一组绝对收敛的非零解式(13)，故由该引理 1，此离散时刻的马尔柯夫链为正常返，由此其 n 步转移概率的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(n\Delta t)>0$. 但因 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$ 存在，与初始条件无关，所以

$$p_j=\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n\Delta t)>0$$

此即所证. 这样就完成了成批服务的 $M/M^k/1/\infty$ 排队系统的讨论.

需要指出的是，根据对 $M/M^k/1/\infty$ 系统的讨论，可以得到另一对应系统的性质，这就是 $E_k/M/1/\infty$ 排队系统：到达间隔时间服从参数为 λ 的 k 阶爱尔朗分布，单个服务、单服务台的等待制系统，其顾客的服务时间为参数 μ 的负指数分布. 在 $M/M^k/1/\infty$ 系统中到达

第 k 个顾客，相当于在 $E_k/M/1/\infty$ 系统中到达第 1 个顾客，在 $M/M^k/1/\infty$ 系统中到达第 $2k$ 个顾客，相当于在 $E_k/M/1/\infty$ 系统到达第 2 个顾客…；而在 $M/M^k/1/\infty$ 系统中服务第 1 批、第 2 批、……顾客，相当于在 $E_k/M/1/\infty$ 系统中服务第 1 个、第 2 个、……顾客，其服务时间分布都是相同的负指数分布. 于是，可得 $E_k/M/1/\infty$ 系统队长的平稳分布 $\bar{p}_j$ 为

$$\bar{p}_j = \sum_{r=kj}^{kj+k-1} p_r = \begin{cases} 1-\rho, & j=0 \\ \rho(1-\delta)\delta^{j-1}, & j\geqslant 1 \end{cases} \tag{15}$$

其中，$z_0 = (\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{k}}$，$\delta(0<\delta<1)$ 为方程

$$z(1+\frac{1-z}{k\rho})^k = 1$$

在(0,1)内的惟一实根，此式与第五章 § 2 中推论 4 是一致的.

§ 5 "随机服务的"$GI/M/c/\infty$ 排队系统

考虑 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，但服务次序是随机选择的，即每当有一个服务台得空时，就在等待服务的顾客中随机选择一人进行服务，此时等待服务的每一位顾客被选到的概率相同，把这种服务简称为"**随机服务**". 显然在"随机服务"和在"先到先服务"的排队规则下，队长分布是一样的，但等待时间却不同. 在这一节中我们就来讨论"随机服务"情形下等待时间的平稳分布.

仍然假定输入分布为一般分布 $F(t)$，且 $0<\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)$；服务时间分布为 $G(t)=1-\mathrm{e}^{-\mu t}, t\geqslant 0$. 我们把等待时间的平稳分布记为 $W_q(t)$，其 LS 变换记为

$$w_q(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}W_q(t), \quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0$$

并设 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$.

定理 1　对"随机服务"的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，等待时间平稳

分布的 LS 变换为下式所给定.

$$w_q(s) = 1 - \frac{K^*}{1-\delta} + K^*\varphi(s,\delta) \tag{1}$$

其中 $\varphi(s,z)$ 满足线性微分方程:

$$\{z - f(s + c\mu(1-z))\}\frac{\partial\varphi(s,z)}{\partial z} + \varphi(s,z)$$

$$= \frac{1}{1-z}\cdot\frac{c\mu\{1 - f(s + c\mu(1-z))\}}{s + c\mu(1-z)} \tag{2}$$

且

$$\varphi(s,\delta(s)) = \frac{c\mu}{s + c\mu[1-\delta(s)]} \tag{3}$$

此处 $\delta(s)$ 为在 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$ 的条件下,方程

$$z = f(s + c\mu(1-z)) = \int_0^\infty e^{-[s+c\mu(1-z)]t}dF(t) \tag{4}$$

在单位圆 $|z|<1$ 内的惟一解,而

$$\delta = \delta(0) \tag{5}$$

K^* 由第五章 §1 中式(23)给出.

证明 令 $\hat{W}_{q_j}(t)$ 为顾客到达时看见所有服务台被占而有 j 个等待者的条件下,他的等待时间 $\leqslant t$ 的概率. 由第五章 §1 知识,我们知道,在 $\rho<1$ 的条件下,系统是平衡的,且顾客到达时看到所有服务台被占,同时有 j 个等待者的概率为

$$p_{j+c}^- = K^*\delta^j$$

而顾客到达时看到有空闲服务台的概率为

$$\sum_{j=0}^{c-1}p_j^- = 1 - \frac{K^*}{1-\delta}$$

此时该顾客不需等待. 因此对任意 $t\geqslant 0$,有下列关系式:

$$W_q(t) = \sum_{j=0}^{c-1}p_j^- + \sum_{j=0}^{\infty}p_{j+c}^-\hat{W}_{q_j}(t)$$

$$= 1 - \frac{K^*}{1-\delta} + K^*\sum_{j=0}^{\infty}\hat{W}_{q_j}(t)\delta^j \tag{6}$$

令

$$\hat{w}_{q_j}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\hat{W}_{q_j}(t),$$

$$\varphi(s,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{w}_{q_j}(s) z^j, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0, |z| < 1$$

将式(6)取 LS 变换,得

$$w_q(s) = 1 - \frac{K^*}{1-\delta} + K^* \varphi(s,\delta)$$

此即所求的式(1). 现只需证 $\varphi(s,z)$ 满足式(2)与式(3).

顾客到达时看到所有服务台被占而有 j 个等待者的条件下,他的等待时间$\leqslant t$ 这一事件可以在下列互斥的情况下发生:或者在下一到达间隔内服务完 $k(k=0,1,2,\cdots,j)$ 个顾客,而所考虑的顾客在此间隔内尚未被接受服务;或者在下一到达间隔至少服务完 $k+1(k=0,1,2,\cdots,j)$ 个顾客,而所考虑的顾客在第 $k+1$ 次服务完成的时刻被接受服务,因此有下列关系式:

$$\hat{W}_{q_j}(t) = \sum_{k=0}^{j} \int_0^t \frac{j+1-k}{j+1} \cdot \frac{(c\mu x)^k}{k!} e^{-c\mu x} \hat{W}_{q_{j+1-k}}(t-x) dF(x)$$
$$+ \sum_{k=0}^{j} \int_0^t \frac{1}{j+1} \cdot \frac{c\mu(c\mu x)^k}{k!} e^{-c\mu x} [1-F(x)] dx$$

取 LS 变换,得

$$(j+1)\hat{w}_{q_j}(s) = \sum_{k=0}^{j} (j+1-k) \hat{w}_{q_{j+1-k}}(s) \int_0^\infty e^{-(s+c\mu)x} \frac{(c\mu x)^k}{k!} dF(x)$$
$$+ \sum_{k=0}^{j} \int_0^\infty e^{-(s+c\mu)x} \frac{c\mu(c\mu x)^k}{k!} [1-F(x)] dx$$

两端分别乘 z^{j+1}后对 j 从 0 到∞求和,经整理即得式(2).

因 $\rho<1$,故由第五章§4 中的引理 1,当 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$ 时,方程 $z = f(s+c\mu(1-z))$ 在 $|z|<1$ 内有惟一解 $z=\delta(s)$. 但当 $\mathscr{R}(x)\geqslant 0$ 时,$\varphi(s,z)$在$|z|<1$ 内为 z 的解析函数,因此将 $z=\delta(s)$代入式(2)即得式(3). 至此定理 1 证毕. ▓

推论1 对“随机服务”的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 条件下，平均等待时间为

$$\overline{W}_q=\frac{K^*}{c\mu(1-\delta)^2} \tag{7}$$

证明 对任意固定的 s，将 $\varphi(s,z)$ 展开成泰勒级数：

$$\varphi(s,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(s)[z-\delta(s)]^j \tag{8}$$

其中

$$\varphi_j(s)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\varphi(s,z)}{\partial z^j}\bigg|_{z=\delta(s)}$$

代入式(1)，得

$$w_q(s)=1-\frac{K^*}{1-\delta}+K^*\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(s)[\delta-\delta(s)]^j$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{W}_q&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[w_q(s)]\big|_{s=0}\\&=-K^*\sum_{j=0}^{\infty}\{\varphi_j'(s)[\delta-\delta(s)]^j\\&\quad-\varphi_j(s)\cdot j[\delta-\delta(s)]^{j-1}\delta'(s)\}\big|_{s=0}\\&=-K^*\{\varphi_0'(0)-\varphi_1(0)\delta'(0)\}\end{aligned} \tag{9}$$

现在来求 $\varphi_0'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\varphi_0(s)]|_{s=0}$ 与 $\varphi_1(0)$．由于

$$\varphi_0'(0)=-\frac{1}{c\mu(1-\delta)^2}+\frac{\delta'(0)}{(1-\delta)^2} \tag{10}$$

又

$$\varphi_1(s)=\frac{\partial\varphi(s,z)}{\partial z}\bigg|_{z=\delta(s)}$$

因此，将式(2)对 z 求导，再令 $z=\delta(s)$，并注意到 $\delta(s)=f(s+c\mu(1-\delta(s)))$，立即可得 $\frac{\partial\varphi(s,z)}{\partial z}\Big|_{z=\delta(s)}$ 的表达式，再令 $s=0$，得

$$\varphi_1(0)=\frac{1}{(1-\delta)^2} \tag{11}$$

将式(10)与式(11)代入式(9)即得式(7).

推论 2 对"随机服务"的 $M/M/c/\infty$ 排队系统，在 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 下，等待时间分布的 LS 变换表达式为

$$w_q(s)=1-\frac{p_c}{1-\rho}\cdot\frac{s}{s+c\mu(1-\rho)} \tag{12}$$

其分布函数 $W_q(t)$ 为

$$W_q(t)=1-\frac{p_c}{1-\rho}e^{-c\mu(1-\rho)t},\quad t\geqslant 0 \tag{13}$$

而平均等待时间为

$$\overline{W}_q=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2}p_c \tag{14}$$

其中 p_c 表示系统中有 c 个顾客的平稳概率，由第二章§5 中的式(3)确定.

§6 "后到先服务"的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统

考虑 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，但服务次序是"后到先服务"，即每当有一个服务台得空时，等待服务的顾客中最后到来者被接受服务. 显然，"后到先服务"排队系统的队长分布与"先到先服务"的情形相同，但等待时间分布却有差异. 下面我们就来讨论"后到先服务"情形下等待时间的平稳分布.

仍假定输入分布为一般分布 $F(t)$，且 $0<\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)<\infty$；服务时间分布为 $G(t)=1-e^{-\mu t},t\geqslant 0$. 我们把等待时间的平稳分布记为 $W_q(t)$，其 LS 变换为

$$w_q(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}W_q(t),\quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0$$

并设 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$.

定理1 对"后到先服务"的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，等待时间平

稳分布的 LS 变换为下式所给定：

$$w_q(s)=1-\frac{K^*}{1-\delta}+\frac{K^*}{1-\delta}\frac{c\mu[1-\delta(s)]}{s+c\mu[1-\delta(s)]} \tag{1}$$

其中 $\delta(s)$ 为在 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$ 的条件下，方程

$$z=f(s+c\mu(1-z))=\int_0^\infty e^{-[s+c\mu(1-z)]t}dF(t) \tag{2}$$

在单位圆 $|z|<1$ 内的惟一解，而

$$\delta=\delta(0) \tag{3}$$

K^* 由第五章 § 1 中式(23)给出.

证明 令 $\hat{W}_{q_j}(t)$ 为顾客到达时看到全部服务台被占而需要等待，但无其它等待者的条件下，他的等待时间 $\leqslant t$. 同时从此顾客到达时刻开始到他进入服务台之后为止，队伍中共有 j 人进入服务台的联合概率($j=1,2,\cdots$).

在"后到先服务"的情形下，由于顾客的等待时间与比他先来而在队伍中等待的顾客无关，因此 $\sum_{j=1}^\infty \hat{W}_{q_j}(t)$ 就表示在顾客到达后需要等待的条件下，他的等待时间 $\leqslant t$ 的概率.

由第五章 § 1 知识，我们知道，在 $\rho<1$ 的条件下，系统是平衡的，且顾客到达时遇到有空闲服务台而不需等待的概率为

$$\sum_{j=0}^{c-1}p_j^-=1-\frac{K^*}{1-\delta}$$

而顾客到达时遇到所有服务台被占而需要等待的概率为

$$\sum_{j=c}^\infty p_j^-=\frac{K^*}{1-\delta}$$

因此，对任意 $t\geqslant 0$，有

$$W_q(t)=1-\frac{K^*}{1-\delta}+\frac{K^*}{1-\delta}\sum_{j=1}^\infty \hat{W}_{q_j}(t) \tag{4}$$

令

$$\hat{w}_{q_j}(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\hat{W}_{q_j}(t)$$

$$\Gamma(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{w}_{q_j}(s), \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0$$

将式(4)取 LS 变换,即得

$$w_q(s) = 1 - \frac{K^*}{1-\delta} + \frac{K^*}{1-\delta}\Gamma(s) \tag{5}$$

为了求 $\Gamma(s)$,引入一个新的排队系统 $GI/M/1/\infty$,其输入分布仍为 $F(t)$,服务时间按参数 $c\mu$ 的负指数分布,而排队规则为"先到先服务". 在此新系统中,对 $m=0,1,2,\cdots;j=1,2,\cdots$ 定义 $\hat{W}_{q_{mj}}(t)$ 为顾客到达时发现系统队长等于 $m+1$(即服务台被占,同时有 m 个顾客正在排队等待)的条件下,从此顾客到达时刻开始到队长第一次变成1(即服务台被占,但等待顾客数第一次变为0)为止的时间长度$\leqslant t$,且在此时间内队伍中共有 $j+m$ 人进入服务台的联合概率. 显见

$$\hat{W}_{q_j}(t) = \hat{W}_{q_{0j}}(t), \quad j \geqslant 1 \tag{6}$$

因此

$$\hat{w}_{q_j}(s) = \hat{w}_{q_{0j}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\hat{W}_{q_{0j}}(t), \quad j \geqslant 1 \tag{7}$$

对 $\hat{W}_{q_{mj}}(t)$,由全概率定理,可得如下关系式:

$$\begin{cases} \hat{W}_{q_{m1}}(t) = \int_0^t e^{-c\mu x} \dfrac{c\mu(c\mu x)^m}{m!}[1-F(x)]dx \\ \hat{W}_{q_{m,j+1}}(t) = \sum_{i=0}^{m}\int_0^t e^{-c\mu x} \dfrac{(c\mu x)^i}{i!}\hat{W}_{q_{m+1-i,j}}(t-x)dF(x), \quad j \geqslant 1 \end{cases}$$

取 LS 变换,得

$$\begin{cases} \hat{w}_{q_{m1}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+c\mu)x} \dfrac{c\mu(c\mu x)^m}{m!}[1-F(x)]dx \\ \hat{w}_{q_{m,j+1}}(s) = \sum_{i=0}^{m}\hat{w}_{q_{m+1-i,j}}(s)\int_0^{\infty} e^{-(s+c\mu)x} \dfrac{(c\mu x)^i}{i!}dF(x), \quad j \geqslant 1 \end{cases} \tag{8}$$

引进母函数

$$\Omega_j(s,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{w}_{q_{mj}}(s)z^m, \quad \mathscr{R}(s) > 0, |z| < 1, j \geqslant 1$$

将式(8)的两端乘以 z^m 后，对 m 从0到∞求和，并注意到式(7)，即得

$$\begin{cases}\Omega_1(s,z) = \dfrac{c\mu[1-f(s+c\mu(1-z))]}{s+c\mu(1-z)} \\ \Omega_{j+1}(s,z) = \dfrac{1}{z}f(s+c\mu(1-z))[\Omega_j(s,z)-\hat{w}_{q_j}(s)], \quad j\geqslant 1\end{cases}$$

再对 j 取母函数($|u|\leqslant 1$)，得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Omega_j(s,z)u^j$$

$$=\frac{\left\{\dfrac{c\mu[1-f(s+c\mu(1-z))]uz}{s+c\mu(1-z)} - uf(s+c\mu(1-z))\sum_{j=1}^{\infty}\hat{w}_{q_j}(s)u^j\right\}}{z-uf(s+c\mu(1-z))} \tag{9}$$

由第五章§4中引理1，由于 $\rho<1$，上式右端分母当 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0, |u|<1$ 时，在 $|z|<1$ 内有惟一解 $z=\delta(s,u)$，且 $\lim\limits_{u\to 1^-}\delta(s,u)=\delta(s)$，其中 $\delta(s)$ 为在 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$ 的条件下，方程(2)在 $|z|<1$ 内的惟一解. 但当 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0, |u|<1, |z|<1$ 时，式(9)左端为 z 的解析函数，因此 $z=\delta(s,u)$ 也必为式(9)右端分子的零点，于是，在注意到 $\delta(s,u)=uf[s+c\mu(1-\delta(s,u))]$，易得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\hat{w}_{q_j}(s)u^j = \frac{c\mu[u-\delta(s,u)]}{s+c\mu[1-\delta(s,u)]} \tag{10}$$

由阿贝尔一致收敛性定理，知道式(10)左端关于 $u(|u|\leqslant 1)$ 一致收敛，于是

$$\Gamma(s) = \lim_{u\to 1^-}\sum_{j=1}^{\infty}\hat{w}_{q_j}(s)u^j = \frac{c\mu[1-\delta(s)]}{s+c\mu[1-\delta(s)]}$$

即得所证的结论. 至此定理证毕.

推论1 对"后到先服务"的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，当 $\rho=\dfrac{\lambda}{c\mu}<1$ 时，平均等待时间为

$$\overline{W}_q = \frac{K^*}{c\mu(1-\delta)^2} \tag{11}$$

推论2 对"后到先服务"的 $M/M/c/\infty$ 排队系统，当 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}<1$ 时，等待时间分布的 LS 变换为

$$w_q(s)=1-\frac{p_c}{1-\rho}\frac{s}{s+c\mu(1-\rho)} \tag{12}$$

其分布函数 $W_q(t)$ 为

$$W_q(t)=1-\frac{p_c}{1-\rho}e^{-c\mu(1-\rho)t}, \quad t\geqslant 0 \tag{13}$$

而平均等待时间为

$$\overline{W}_q=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2}p_c \tag{14}$$

其中 p_c 表示系统中有 c 个顾客的平稳概率，由第二章 §5 中的式(3)给出.

需要指出的是，从前面的讨论中看到，"先到先服务"、"随机服务"与"后到先服务"的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统，在系统平衡的条件下，其顾客的平均等待时间都是一样的，而且对 $M/M/c/\infty$ 排队系统，三种情形下顾客的等待时间分布也是一样的. 另外，还有许多各种规则下的特殊型排队系统，如成批到达且成批服务(批量固定或变化)的排队系统、到达时刻依赖于队长的排队系统、输入不独立的排队系统，以及离散时间到达与离散时间服务的排队系统等，限于篇幅，本书不再深入讨论下去，读者可以从后面参考文献中找到相关内容.

第八章　排队系统的最优化与应用实例

§1　排队系统的最优化问题概述

排队系统的最优化问题分为两大类：系统设计的最优化与系统控制的最优化，前者称为**静态问题**，后者称为**动态问题**. 研究排队系统的根本目的在于以最少的投入得到更大的效益. 例如，在等待制的 $M/M/c/\infty$ 排队系统中，输入与服务参数 λ、μ 假定均为已知，希望平均队长 $\leqslant 10$，问至少应该设置几个服务台，即 $c=?$ 显然，根据前面第二章§5求得的平均队长公式，即可算出 c 的最小值，这就是在"平均队长恒不超过10"这个指标下服务台数目的最优设计问题. 另外，也可以给定某种费用结构，要求在总费用最小的情况下给出系统的最优设计. 例如仍考虑等待制的 $M/M/c/\infty$ 排队系统，输入与服务参数 λ、μ 均为已知，假定系统有两种费用，一种是等待费用，每个顾客在系统中逗留单位时间的等待费用为 e 元，另一种是服务费用，每个服务台在单位时间内所花的费用为 a 元，于是系统在单位时间内的平均总费用等于 $e\overline{N}+a\cdot c$ 元，其中 $\overline{N}$ 为系统中顾客的平均数. 根据第二章§5给出的 $\overline{N}$ 的计算公式，总费用便表成 λ、μ、c 的函数，于是就能确定使平均总费用最少的最优值 c.

像上述在给出的质量指标下寻求最优设计的问题，我们都称为排队系统设计的最优化问题，这类问题一般可借助于前面所得到的一些表达式来解决.

另一类排队系统的最优化问题，即系统控制的最优化问题或称动态问题，它是时间的函数，解决起来较前者要困难、复杂得多，而且对不同系统控制的最优化问题，常常必须采用一些特殊的技术来加以处理.

由于系统控制最优化问题较为复杂，因此本章试图通过§2与§3介绍排队系统控制的两个典型方面来阐述其基本思想. §2介绍服务设备的最优控制，用控制服务设备来达到系统的最优化，处理方法采用我们所熟悉的状态方程法；§3介绍输入过程的最优控制，用控制输入过程来达到系统的最优化，采用马尔柯夫决策过程的方法来处理，这种方法是解决动态问题的有力工具. 有关这方面的内容，读者可阅读参考文献[13].

§2 服务设备的最优控制

假定输入是参数为λ的Poisson流，一个服务台，服务时间是负指数分布，但其服务率可以根据队长的变化情况加以调整，队长增加时，服务速率随之提高；而队长减少时，服务速率就降低. 服务速率的这种变化，就可用建立或撤消系统中并联的服务台来实现. 由于服务台的建立或撤消需要一定的安装费(或者说，服务率的调整需要调整费)，因此系统的控制者自然地不希望服务速度的变化率太高，也就是说，当队长发生变化时，不能马上调整服务速率，而要酌量地延迟调整时间，因而就产生了时滞现象：服务速率的变化不仅依赖于当前的队长，而且还依赖于系统的历史，于是我们自然地采用下面这样的控制规则：

考虑$M+1$种不同的服务率$\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_M$，它们满足：

$$0=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_M$$

以及考虑一个代表控制规则的正整数l. 当队长(从下面)达到值kl $(0<k\leqslant M)$，且服务率为μ_{k-1}时，就将服务率提高到μ_k；当队长超过Ml后，服务率就永远取为μ_M，不再提高. 当队长(从上面)下降到值$(k-1)l(0<k\leqslant M)$，且服务率为μ_k时，就将速率降低到μ_{k-1}.

假设系统费用分三部分：

1)服务费，与平均服务率μ成正比，以单位服务率服务单位时间的服务费是a；

2)排队费，与平均队长N成正比，每个顾客在系统内逗留单位

时间的排队费是 b；

3）调整费，与单位时间内平均调整次数 R 成正比，每调整1次的调整费是 e.

故单位时间内的平均总费用为

$$F(l)=a\mu(l)+b\overline{N}(l)+eR(l) \tag{1}$$

其中 $\mu(l)$、$\overline{N}(l)$ 与 $R(l)$ 都是控制变量 l 的函数.

我们的目的就是决定控制变量 l 应取何值才能使平均总费用 $F(l)$ 最小.

下面分别求平均服务率 $\mu(l)$、平均队长 $\overline{N}(l)$ 与平均调整次数 $R(l)$ 的表达式.

1. 求平均服务率 $\mu(l)$ 的表达式

令

$$\rho_k=\frac{\lambda}{\mu_k}<1,\quad 1\leqslant k\leqslant M \tag{2}$$

我们称系统在时刻 t 的状态 $N(k,i)$，若此时服务率为 μ_k，同时系统内的顾客数（包括正在服务的与排队等待的）为 i，并令

$$p(t;k,i)=P\{N(t)=(k,i)\}$$

可以证明 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为马尔柯夫过程而且在假设条件（2）下，类似第七章§4的处理方法，可证极限

$$\lim_{t\to\infty}p(t;k,i)=p(k,i)>0$$

存在，与初始条件无关，且 $\{p(k,i);0\leqslant k\leqslant M,i\geqslant 0\}$ 构成一概率分布.

下面列出状态转移方程组：

$$p(t+\Delta t;0,0)=\mu_1\Delta t p(t;1,1)+(1-\lambda\Delta t)p(t;0,0) \tag{3}$$

$$p(t+\Delta t;0,i)=(1-\lambda\Delta t)p(t;0,i)+\lambda\Delta t p(t;0,i-1),\quad 0<i\leqslant l-1 \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&p(t+\Delta t;k,(k-1)l+1) \\
&\quad =\mu_k\Delta t p(t,k,(k-1)l+2) \\
&\qquad +(1-\lambda\Delta t-\mu_k\Delta t)p(t,k,(k-1)l+1), \\
&\qquad\qquad 0<k\leqslant M
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
p(t+\Delta t;k,i)=&\mu_k\Delta t p(t;k,i+1) \\
&+(1-\lambda\Delta t-\mu_k\Delta t)p(t;k,i) \\
&+\lambda\Delta t p(t;k,i-1), \quad 0<k\leqslant M, \\
&(k-1)l+1<i<kl
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
p(t+\Delta t;k,kl)=&\mu_k\Delta t p(t;k,kl+1) \\
&+(1-\lambda\Delta t-\mu_k\Delta t)p(t;k,kl) \\
&+\lambda\Delta t p(t;k,kl+1) \\
&+\mu_{k+1}\Delta t p(t;k+1,kl+1) \\
&+\lambda\Delta t p(t;k-1,kl-1), \quad 0<k<M
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
p(t+\Delta t;M,Ml)=&\mu_M\Delta t p(t;M,Ml+1) \\
&+(1-\lambda\Delta t-\mu_M\Delta t)p(t;M,Ml) \\
&+\lambda\Delta t p(t;M,Ml-1) \\
&+\lambda\Delta t p(t;M-1,Ml-1)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
p(t+\Delta t;k,i)=&\mu_k\Delta t p(t;k,i+1)+(1-\lambda\Delta t \\
&-\mu_k\Delta t)p(t;k,i)+\lambda\Delta t p(t;k,i-1), \\
&0<k<M,kl<i<(k+1)l-1
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&p(t+\Delta t;k,(k+1)l-1) \\
&\quad =(1-\lambda\Delta t-\mu_k\Delta t)p(t;k,(k+1)l-1) \\
&\qquad +\lambda\Delta t p(t;k,(k+1)l-2), \quad 0<k<M
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$p(t+\Delta t;M,i)=\mu_M\Delta t p(t;M,i+1)$$
$$+(1-\lambda\Delta t-\mu_M\Delta t)p(t;M,i)$$
$$+\lambda\Delta t p(t;M,i-1),\quad i>Ml \tag{11}$$

移项后除以 Δt，再令 $\Delta t\to 0$，由式(3)与式(4)，得

$$\mu_1 p(1,1)=\lambda p(0,0) \tag{12}$$

$$p(0,0)=p(0,1)=\cdots=p(0,l-1) \tag{13}$$

由式(5)与式(6)，得

$$\mu_k p(k,i+1)-\lambda p(k,i)=\mu_k p(k,(k-1)l+1),$$
$$0<k\leqslant M,(k-1)l+1\leqslant i\leqslant kl \tag{14}$$

由式(9)与式(10)，得

$$\mu_k p(k,i+1)-\lambda p(k,i)=-\lambda p(k,(k+1)l-1),$$
$$0<k<M,kl\leqslant i<(k+1)l-1 \tag{15}$$

由式(9)与式(10)，利用式(14)，得

$$\mu_M p(M,i+1)-\lambda p(M,i)=\mu_M p(M,(M-1)l+1)$$
$$-\lambda p(M-1,Ml-1),\quad i\geqslant Ml \tag{16}$$

由式(7)，得

$$\mu_k p(k,kl+1)-\lambda p(k,kl)=\mu_k p(k,kl)-\lambda p(k,kl-1)$$
$$-\mu_{k+1}p(k+1,kl+1)$$
$$-\lambda p(k-1,kl-1),0<k<M \tag{17}$$

将式(14)与式(15)代入式(17)，得

$$\mu_{k+1}p(k+1,kl+1)+\lambda p(k-1,kl-1)$$
$$=\mu_k p(k,(k-1)l+1) \tag{18}$$
$$+\lambda p(k,(k+1)l-1),\quad 0<k<M$$

式(18)表示一个平衡性质，即单位时间内从服务率 μ_k 转移出去的平均次数等于转移进来的平均次数.

由式(12)与式(13)，得

$$\mu_1 p(1,1) = \lambda p(0,l-1)$$

在式(18)中取 $k=1$，并利用上式，即得

$$\mu_2 p(2,l+1) = \lambda p(1,2l-1)$$

由此类推，可知对所有 $k \geqslant 0$，均有

$$\mu_{k+1} p(k+1,kl+1) = \lambda p(k,(k+1)l-1), \quad 0 \leqslant k < M \tag{19}$$

此式表示在单位时间内从服务率 μ_{k+1} 转移到 μ_k 的平均次数等于从 μ_k 转移到 μ_{k+1} 的平均次数. 由于式(19)，式(16)就变成

$$\mu_M p(M,i+1) - \lambda p(M,i) = 0, \quad i \geqslant Ml \tag{20}$$

将式(14)、式(15)与式(20)分别除以 μ_k，得

$$\begin{cases} p(k,i+1) = \rho_k p(k,i) + p(k,(k-1)l+1), \\ \qquad\qquad 0 < k \leqslant M, (k-1)l+1 \leqslant i < kl \\ p(k,i+1) = \rho_k p(k,i) - \rho_k p(k,(k+1)l-1), \\ \qquad\qquad 0 < k < m, kl \leqslant i < (k+1)l-1 \\ p(M,i+1) = \rho_M p(M,i), \quad i \geqslant Ml \end{cases} \tag{21}$$

于是对任意 $k(0<k<M)$，由 $i=(k-1)l+1$时的 $p(k,i)$开始往上递推，最后可求得 $i=(k+1)l-2$时 $p(k,i+1)$的值，故得

$$\begin{aligned} p(k,(k+1)l-1) = {} & \rho_k^{l-1}(1+\rho_k+\rho_k^2+\cdots+\rho_k^{l-1}) \cdot \\ & p(k,(k-1)l+1) \\ & - \rho_k(1+\rho_k+\rho_k^2+\cdots+\rho_k^{l-2}) p(k,(k+1)l-1), \\ & \qquad 0 < k < M \end{aligned}$$

因此

$$p(k,(k+1)l-1) = \rho_k^{l-1} p(k,(k-1)l+1), \quad 0 < k < M \tag{22}$$

这样，式(21)可写成

$$
\begin{cases}
p(k,i+1)=\rho_k p(k,i)+p(k,(k-1)l+1), \\
\qquad\qquad 0<k\leqslant M,(k-1)l+1\leqslant i<kl \\
p(k,i+1)=\rho_k p(k,i)-\rho_k^l p(k,(k-1)l+1), \\
\qquad\qquad 0<k<M, kl\leqslant i<(k+1)l-1 \\
p(M,i+1)=\rho_M p(M,i), \quad i\geqslant Ml
\end{cases}
\tag{23}
$$

令

$$
p(k,\cdot)=\begin{cases}
\sum\limits_{i=(k-1)l+1}^{(k+1)l+1} p(k,i), & 0<k<M \\
\sum\limits_{i=(M-1)l+1}^{\infty} p(M,i), & k=M
\end{cases}
$$

将式(23)对 i 求和，经过整理即得

$$
\begin{cases}
p(k,\cdot)=\dfrac{l(1-\rho_k^l)}{1-\rho_k}p(k,(k-1)l+1), \quad 0<k<M \\
p(M,\cdot)=\dfrac{l}{1-\rho_M}p(M,(M-1)l+1)
\end{cases}
\tag{24}
$$

又由式(19)，得

$$
p(k,(k-1)l+1)=\rho_k p(k-1,kl-1), \quad 0<k\leqslant M \tag{25}
$$

将式(22)代入式(25)，得

$$
p(k,(k-1)l+1)=\rho_k\rho_{k-1}^{l-1}p(k-1,(k-2)l+1), \quad 1<k\leqslant M
$$

由此递推，即得

$$
p(k,(k-1)l+1)=\rho_k\rho_{k-1}^l\cdots\rho_2^l\rho_1^{l-1}p(1,1)
$$

$$
=\begin{cases}
\rho_k\prod\limits_{j=1}^{k-1}\rho_j^l\cdot p(0,0), & 2\leqslant k\leqslant M \\
\rho_1\cdot p(0,0), & k=1
\end{cases}
\tag{26}
$$

式(26)代入式(24)，得

$$p(k,\cdot)=\begin{cases}\dfrac{l(1-\rho_k^l)\rho_k}{1-\rho_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\rho_j^l\cdot p(0,0), & 0\leqslant k<M\\[2ex] \dfrac{l\rho_k}{1-\rho_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\rho_j^l\cdot p(0,0), & k=M\end{cases}\tag{27}$$

其中，此处规定在 $k=1$ 时，$\prod\limits_{j=1}^{0}\rho_j^l=1$；在 $k=0$ 时，

$$\frac{\rho_0(1-\rho_0^l)}{1-\rho_0}\prod_{j=1}^{-1}\rho_j^l=1$$

因为由式(13)，有

$$p(0,\cdot)=lp(0,0)\tag{28}$$

所以，将式(27)对 $k\geqslant 0$ 求和，即得

$$p(0,0)=\left\{l\sum_{n=0}^{M-1}\frac{\rho_n}{1-\rho_n}(1-\rho_n^l)\prod_{j=1}^{n-1}\rho_j^l+\frac{l\rho_M}{1-\rho_M}\prod_{j=1}^{M-1}\rho_j^l\right\}^{-1}\tag{29}$$

于是由式(27)与式(29)，可得平均服务率 $\mu(l)=\sum\limits_{k=0}^{M}\mu_k p(k,\cdot)$ 的表达式.

2. 求单位时间内平均调整次数 $R(l)$ 的表达式

单位时间内从服务率为 μ_k 转移到服务率为 μ_{k-1} 的平均调整次数 r_k，由下式给出

$$r_k=\mu_k\cdot p(k,(k-1)l+1),\quad 0<k\leqslant M\tag{30}$$

于是将式(26)代入，并注意到式(29)，得

$$r_k=\frac{\lambda\prod\limits_{j=1}^{k-1}\rho_j^l}{l\sum\limits_{n=0}^{M-1}\dfrac{\rho_n(1-\rho_n^l)}{1-\rho_n}\prod\limits_{j=1}^{n-1}\rho_j^l+\dfrac{l\rho_M}{1-\rho_M}\prod\limits_{j=1}^{M-1}\rho_j^l},\quad 0<k\leqslant M\tag{31}$$

由于单位时间内从 μ_k 转移到 μ_{k-1} 的平均次数等于从 μ_{k-1} 转移到 μ_k 的平均调整次数，因此单位时间内平均总调整次数为

$$R(l) = 2\sum_{k=1}^{M} r_k \tag{32}$$

然后将式(31)代入即可得 $R(l)$的表达式.

3. 最后求平均队长 $\overline{N}(l)$ 的表达式

令 $E[N|k]$为服务率等于 μ_k 的条件下的平均队长，则

$$\begin{aligned}\overline{N}(l) &= \sum_{k=0}^{M} E[N|k]\cdot p(k,\cdot) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} ip(0,i) + \sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i=(k-1)l+1}^{(k+1)l-1} ip(k,i) + \sum_{i=(M-1)l+1}^{\infty} ip(M,i)\end{aligned} \tag{33}$$

由式(13)，得

$$\sum_{i=0}^{l-1} ip(0,i) = \frac{l(l-1)}{2}p(0,0) \tag{34}$$

再将式(23)两端乘以 $i+1$后对 i 求和(当$0<k<M$ 时，$(k-1)l+1\leqslant i\leqslant(k+1)l-2$；当 $k=M$ 时，$(M-1)l+1\leqslant i<\infty$)，利用式(22)，经化简，即得

$$\begin{aligned}\sum_{i=(k-1)l+1}^{(k+1)l-1} ip(k,i) &= \frac{\rho_k}{1-\rho_k}p(k,\cdot) \\ &\quad + \frac{l}{1-\rho_k}\left\{\frac{(2k-1)l+1}{2}\right. \\ &\quad \left. - \rho_k^l\frac{(2k+1)l+1}{2}\right\}p(k,(k-1)l+1), \\ &\qquad 0<k<M\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=(M-1)l+1}^{\infty} ip(M,i) &= \frac{\rho_M}{1-\rho_M}p(M,\cdot) \\ &\quad + \frac{l[(2M-1)l+1]}{2(1-\rho_M)}p(M,(M-1)l+1)\end{aligned} \tag{36}$$

然后将式(27)与式(26)代入上面两式，经过整理，再结合 $p(0,0)$的

表达式即可得平均队长 $\overline{N}(l)$ 的表达式.

于是，$\mu(l)$、$R(l)$ 与 $\overline{N}(l)$ 的表达式已求得，将这些表达式代入式(1)，即得平均总费用 $F(l)$ 的表达式，此式中 λ、μ_k、$\rho_k=\frac{\lambda}{\mu_k}$、$M$ 均为已知常数，l 为待定的控制变量. 只要给定 l 的一个值，就能计算出平均总费用 $F(l)$ 的一个对应值，因此，用最优化问题的数值计算就能确定 l 的最优值 l^*.

§3 输入过程的最优控制

考虑 $GI/M/c$ 损失制排队系统，顾客到达间隔的分布函数记为 $F(t)$，服务时间分布是参数 μ 的负指数分布. 输入包括 $m(m\geqslant 1)$ 个顾客类，当有顾客到达时，此顾客属于第 k 类 $(1\leqslant k\leqslant m)$ 顾客的概率为 $e_k>0$，且 $\sum_{k=1}^{m}e_k=1$.

服务台每服务一个第 k 类顾客可以产生效益 h_k，为方便计，不妨将顾客类安排得使

$$h_1>h_2>\cdots>h_m>0$$

当顾客到达时，若 c 个服务台全都被占，则此顾客就被损失；但若顾客到达的瞬时，服务台并未全占，则服务机构就要作出决策：是否接受该顾客进行服务. 如果接受，服务机构就产生相应的效益；如果拒绝，则是为了保留空着的服务台，以备下一个能产生更高效益的顾客到来. 我们的目的就是使系统在长期内所产生的平均效益最大.

例如，在通信系统中，对某些重要的通道首先予以保证，使得这些通道的信息尽可能不受损失.

这种对输入顾客采用接受或拒绝的决策来加以控制，以使系统产生的平均效益达到最优的问题就属于输入过程的最优控制问题.

下面将问题转化为一个马尔柯夫决策过程的问题.

我们说系统处于状态 $i(0\leqslant i\leqslant c)$，若有 i 个服务台正在进行服务. 于是决策空间 A 中的每个决策都是正整数集 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个子集，例如决策 $a=\{1,3,7\}$，采取决策 a 就是指第1,3,7类顾客到达

时会被接受服务，而其它类的顾客均遭拒绝. 因此对状态 $i(i<c)$，其对应的决策集 A_i 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的所有可能子集所构成的集合，但不包括空集 $\varnothing$，因为当服务台没有全部被占时，拒绝所有的顾客显然不能使效益最大；而 A_c 只有一个元素，即空集 $\varnothing$，因为当到来的顾客遇到服务台全部被占时即被损失.

策略集

$$\mathbf{F}=\left\{f=\begin{pmatrix}f_0\\f_1\\\vdots\\f_c\end{pmatrix}:f_i\in A_i,0\leqslant i\leqslant c\right\}$$

采用策略 $f=\begin{pmatrix}f_0\\f_1\\\vdots\\f_c\end{pmatrix}$ 的意思就是指：当系统处于状态 i 时（i 个服务台被占），接受 k 类顾客服务的充分必要条件是 $k\in f_i$.

令第 n 个顾客到达时看到系统所处的状态为 N_n^-，$n=1,2,\cdots$ 并假定对到达的顾客所采用的策略为 f，则易知

$$N_{n+1}^-=\begin{cases}N_n^-+1-v_n, & \text{若第 } n \text{ 个顾客的类属于 } f_{N_n^-}\\ N_n^--v_n, & \text{若第 } n \text{ 个顾客的类不属于 } f_{N_n^-}\end{cases}$$

其中 v_n 为第 n 个与第 $n+1$ 顾客的到达间隔时间 τ_n 内服务完毕的顾客数，仿照第五章§1中定理1，易知 $\{N_n^-,n=1,2,\cdots\}$ 为齐次的马尔柯夫链，其一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}_f(1)=\begin{bmatrix}p_{00}(f_0) & p_{01}(f_0) & \cdots & p_{0c}(f_0)\\ p_{10}(f_1) & p_{11}(f_1) & \cdots & p_{1c}(f_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{c0}(f_c) & p_{c1}(f_c) & \cdots & p_{cc}(f_c)\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中

$$
p_{ij}(f_i)=\begin{cases}\sum_{k\in f_i}e_k\int_0^{\infty}\binom{j+1}{j}(1-e^{-\mu t})^{i+1-j}e^{-j\mu t}dF(t) \\ \qquad +\sum_{k\notin f_i}e_k\int_0^{\infty}\binom{i}{j}(1-e^{-\mu t})^{i-j}e^{-j\mu t}dF(t), & j\leqslant i<c \\ \sum_{k\in f_i}e_k\int_0^{\infty}e^{-(i+1)\mu t}dF(t), & 若\ j=i+1,i<c \\ 0, & 若\ j>i+1,i<c \\ \int_0^{\infty}\binom{c}{j}(1-e^{-\mu t})^{c-j}e^{-j\mu t}dF(t), & 若\ j\leqslant c\end{cases}
$$

(2)

取$\{N_n^-,n=1,2,\cdots\}$为马尔柯夫决策过程的动态系统，转移矩阵为动态系统的运动规律. 定义效益函数为：对每一决策$a\in A_i$，取效益函数

$$
h(i,a)=h(a)=\sum_{k\in a}e_kh_k \tag{3}
$$

它表示在选择决策a的条件下，接受一个顾客服务后所能获得的期望效益，它与系统所处的状态无关.

现在假定第一个顾客到达时系统初始状态$N_1^-=i$，系统决策人所取的策略为f，并令第k个顾客到达后所产生的效益为$H_k(i,f)$，于是系统长期平均总效益的期望值$\Phi(i,f)$由下式给出：

$$
\begin{aligned}
\Phi(i,f)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[H_k(i,f)\,|_{N_1^-=i,f}] \\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{c}E[H_k(i,f)\,|_{N_1^-=i,N_k^-=j,f}] \\
&\quad\cdot P\{N_k^-=j\,|_{N_1^-=i,f}\} \\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{c}h(f_j)\cdot P\{N_k^-=j\,|_{N_1^-=i,f}\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中$h(f_j)$为式(3)所定义.

引入记号：

$$\Phi(f) = \begin{bmatrix} \Phi(0,f) \\ \Phi(1,f) \\ \vdots \\ \Phi(c,f) \end{bmatrix}; \quad h(f) = \begin{bmatrix} h(f_0) \\ h(f_1) \\ \vdots \\ h(f_c) \end{bmatrix}$$

由于$\{N_n^-, n=1,2,\cdots\}$为齐次马尔柯夫链，因此$P\{N_k^-=j|_{N_1^-=i,f}\}$即为矩阵$[\mathbf{P}_f(1)]^{k-1}$的第$i$行第$j$列的元素，于是式(4)写成矩阵形式为：

$$\Phi(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\mathbf{P}_f(1)]^{k-1}h(f) \tag{5}$$

由一步转移概率矩阵知任意两个状态都互通，且$\mathbf{P}_f(1)$的对角线元素均不为0，故齐次马尔柯夫链$\{N_n^-, n=1,2,\cdots\}$为不可约、非周期的. 又由于状态数目有限，故所有状态组成一个正常返类(参阅参考文献[82]，第355页). 因此极限矩阵

$$\lim_{k\to\infty}[\mathbf{P}_f(1)]^k = \mathbf{P}_f^* > \mathbf{0} \tag{6}$$

存在，所有行向量都相同，且行元素构成概率分布. 这样，结合式(5)，有

$$\Phi(f) = \mathbf{P}_f^* \cdot h(f) \tag{7}$$

我们的目的是要选择一个最优策略f，使得系统长期平均总效益的期望值$\Phi(f)$的所有坐标(分量)均极大化.

下面我们不加证明地给出马尔柯夫决策过程中寻求最优策略的一种算法.

算法第一步：先任选$f\in\mathbf{F}$，并计算矩阵方程

$$u(f) = \mathbf{P}_f^* \cdot h(f) \tag{8}$$

以及

$$\begin{cases} [\mathbf{I} - \mathbf{P}_f(1)]v(f) = h(f) - u(f) \\ \mathbf{P}_f^* \cdot v(f) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{9}$$

的解向量

$$u(f)=\begin{bmatrix}u_0(f)\\u_1(f)\\\vdots\\u_c(f)\end{bmatrix};\quad v(f)=\begin{bmatrix}v_0(f)\\v_1(f)\\\vdots\\v_c(f)\end{bmatrix}$$

其中I为单位矩阵.

由式(7),$u(f)$即系统长期平均总效益的期望值$\Phi(f)$,也就是我们要使其达到极大值的目标函数.

算法第二步:对$i<c$,定义

$$G(i,f)=\Big\{a:a\in A_i;\sum_j p_{ij}(a)u_j(f)>u_i(f)$$

或

$$\sum_j p_{ij}(a)u_j(f)=u_i(f)$$

但

$$h(i,a)+\sum_j p_{ij}(a)v_j(f)>u_i(f)+v_i(f)\Big\} \tag{10}$$

若对所有$i\in\{0,1,2,\cdots,m\}$,$G(i,f)$均为空集$\varnothing$,则f为最优策略,即策略f使$\Phi(f)$所有坐标达到极大值.

若对某个状态i,$G(i,f)$非空,则定义f的策略迭代g:

$$g_i=\begin{cases}a, & \text{任意 } a\in G(i,f)\neq\varnothing\\ f_i, & \text{当 } G(i,f)=\varnothing\end{cases} \tag{11}$$

对此$g=\begin{bmatrix}g_0\\g_1\\\vdots\\g_c\end{bmatrix}$,再按步骤1)计算$u(g)$与$v(g)$,如此继续下去.此算法一定会在有限步内结束,求得最优策略.

§4 应用实例

1. 计算机设计中的实时处理

一个实时计算机系统通常由终端与显示设备、通信网络、多路转换器、中央处理机以及鼓、盘、带等存储设备所组成(见图8.1).

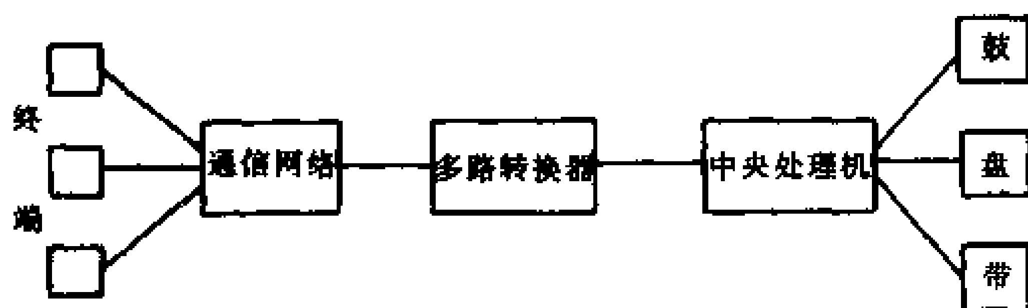


图8.1　实时计算机系统

计算机担负有管理与控制通信网络的责任. 当多路转换器接到信息时,正在进行正常处理的计算机必须立即中断,给予通信任务以快速响应,否则就会造成数据损失. 为了满足这种快速响应的要求,一般在系统中给通信网络以较高的优先权,也就是说,将任务分成两类:一类是通信任务,它们加入一个高优先权类的排队;另一类是正常处理任务,它们加入一个低优先权类的排队.

假定计算机输入的形式都是来自通信网络的"信息",因此,每个信息都由两个计算机任务所组成. 第一个任务要求计算机立即响应并放在高优先权类中,这类任务可能是代码翻译、信息汇编或信息的初步分析,例如来自何处,送往何处等. 第二个任务为正常处理工作,以便处理之后能作出答复,它放在低优先权类. 在每个优先权类内部,服务次序都是先到先服务.

再假定每个终端的输入都是 Poisson 流,而且各个终端的输入是相互独立的,因此,总的输入仍为一个 Poisson 流,设其参数为 λ (>0).

于是，我们就可建立如下的排队系统模型：

输入是参数 λ 的 Poisson 流，每个到达时刻有两个顾客到达，其一排在高优先权的队列，另一排在低优先权的队列（见图8.2）．有一



图 8.2

个服务台（中央处理机），它服务高优先权类顾客的服务时间具有分布函数 $G_1(t)$，服务低优先权类顾客的服务时间具有分布 $G_2(t)$．考虑两种排队规则：

①强拆继续型的优先权； ②非强拆型的优先权．

对于这两种不同排队规则对应的模型，我们来讨论两类顾客的等待时间、响应时间（即等待时间与服务时间之和）及队长的平稳分布，以便作为设计的依据．

令

$$0 < \frac{1}{\mu_i} = \int_0^\infty t\mathrm{d}G_i(t) < \infty, \quad \beta_i = \int_0^\infty t^2\mathrm{d}G_i(t) < \infty$$

$$g_i(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}G_i(t), \quad i = 1,2$$

1）强拆继续型的优先权下，高优先权顾客的平稳分布

在强拆型的优先权下，由于低优先权顾客的出现并不影响高优先权顾客的等待时间与高优先权队列的长度．因此，可以认为低优先权顾客在系统中没有出现，而且在强拆继续型的优先权与强拆重复型的优先权排队规则下，对高优先权的顾客来说，其结果都是一样的．于是，直接应用 $M/G/1/\infty$ 排队系统的分析方法，得出如下结果：

定理1 对强拆继续型的优先权，若 $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1} < 1$，则

1）高优先权顾客等待时间的平稳分布 $W_q^{[1]}(t)$ 存在，其 LS 变换

$w_q^{[1]}(s)$为下式给定：

$$w_q^{[1]}(s) = \frac{s(1-\rho_1)}{s-\lambda+\lambda g_1(s)}, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{1}$$

其平均等待时间为

$$\overline{W}_q^{[1]} = \frac{\lambda\beta_1}{2(1-\rho_1)} \tag{2}$$

2)高优先权顾客响应时间的平稳分布 $W^{[1]}(t)$存在，其 LS 变换为

$$w^{[1]}(s) = w_q^{[1]}(s)g_1(s), \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{3}$$

其平均响应时间为

$$\overline{W}^{[1]} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda\beta_1}{2(1-\rho_1)} \tag{4}$$

3)高优先权顾客队长的平稳分布存在，而且有递推式

$$\begin{cases} p_0^{[1]} = 1-\rho_1 \\ p_j^{[1]} = \dfrac{1}{g_1(\lambda)}\left\{\lambda(1-\rho_1)\displaystyle\int_0^\infty \overline{G}_1(t)\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda t}dt \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} p_{j-k}^{[1]}\left[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dG_1(t)\right]\right\}, \quad j > 1 \end{cases} \tag{5}$$

其母函数为

$$P_1(z) = \frac{(1-\rho_1)(1-z)g_1(\lambda(1-z))}{g_1(\lambda(1-z))-z}, \quad |z| < 1 \tag{6}$$

平均队长为

$$\overline{N}_1 = \rho_1 + \frac{\lambda^2\beta_1}{2(1-\rho_1)} \tag{7}$$

显然，对强拆继续型的优先权，低优先权顾客离开时，留在系统中的高优先权顾客数等于零的概率为1.

另外，我们定义高优先权顾客的忙期为这样的时间间隔，它从某一高优先权顾客到达时发现系统中没有高优先权顾客的那个时刻开始，一直到下一次系统中又没有高优先权顾客的时刻为止. 将此忙期长度 $b^{[1]}$的分布记为 $B^{[1]}(t)$，其 LS 变换记为 $b^{[1]}(s)$，于是，基于上述

同样的理由，写出如下结论.

定理2 对强拆继续（重复）型的优先权，若 $\rho_1<1$，则 $b^{[1]}(s)$ 为方程

$$z=g_1(s+\lambda(1-z)) \tag{8}$$

在 $|z|<1$ 内的惟一解，且

$$B^{[1]}(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t e^{-(s+\lambda)x}\frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!}dG_1^{(j)}(x) \tag{9}$$

而忙期平均长度

$$\bar{b}^{[1]}=\frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)} \tag{10}$$

2）在非强拆型的优先权下，高优先权顾客的平稳分布

假定 $\rho_2=\dfrac{\lambda}{\mu_2}$，且 $\rho_1+\rho_2<1$ 及平稳分布存在. 令 $N_n^+(1)$、$N_n^+(2)$ 分别为第 n 次离开时刻之后的瞬时，高优先权类顾客与低优先权类顾客的队长，这里每次离开的顾客可以属于任何一类. 记 $N_n^+(1)$ 的平稳分布的母函数为

$$\tilde{P}_1^+(z)=E\{z^{N_n^+(1)}\} \tag{11}$$

令 p_0 为在低优先权顾客离开后的瞬时，系统中没有顾客（无论哪一类）的概率.

我们将所考虑的有优先权的排队系统称为 S_1，再引入一个如下无优先权的排队系统 S_2：它是一个 $M/G/1/\infty$ 排队系统，此系统中只有一类顾客，其输入是参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流，服务按到达的先后次序进行，而服务时间分布为 $G(t)=G_1(t)*G_2(t)$，则易知系统 S_1 中的概率 p_0 与系统 S_2 中顾客离开后的队长为0的概率相同，于是

$$p_0=1-(\rho_1+\rho_2) \tag{12}$$

再令 $\tilde{p}_0$ 为第 n 次离开时刻系统中没有顾客（无论哪一类）的概率，此处离开的顾客可以属于任何一类，令

$$X_n=\begin{cases}1, & 若第 n 次离开的是高优先权顾客\\ 0, & 若第 n 次离开的是低优先权顾客\end{cases} \tag{13}$$

则由于高优先权顾客离开时系统中不会没有顾客(至少还会有低优先权顾客),故

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_0 &= P\{N_n^+ = 0\} \\
&= P\{N_n^+ = 0, X_n = 1\} + P\{N_n^+ = 0, X_n = 0\} \\
&= P\{X_n = 0\} \cdot p_0
\end{aligned} \tag{14}
$$

其中 N_n^+ 表示第 n 次离开时刻系统中所有类顾客的顾客数.

定理3 对非强拆型的优先权,在已知离开是高优先权顾客的条件下,高优先权顾客离开系统后的那瞬时,留在系统中高优先权顾客数(不包括刚离去的该类顾客)的平稳分布的母函数为

$$
\begin{aligned}
P_1^+(z) = \frac{g_1(\lambda(1-z))}{g_1(\lambda(1-z)) - z}\{[1 - g_2(\lambda(1-z))] \\
+ (1-\rho_1-\rho_2)(1-z)\}
\end{aligned} \tag{15}
$$

而平均队长为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[P_1^+(z)]|_{z=1} = \rho_1 + \frac{\lambda^2(\beta_1+\beta_2)}{2(1-\rho_1)} \tag{16}
$$

证明 1)先推导 $\tilde{P}_1^+(z)$ 的表达式.

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_1^+(z) &= E\{z^{N_{n+1}^+(1)}\} \\
&= E\{z^{N_{n+1}^+(1)} |_{N_n^+(1)>0}\} \cdot P\{N_n^+(1) > 0\} \\
&\quad + E\{z^{N_{n+1}^+(1)} |_{N_n^+(1)=0, N_n^+(2)=0}\} \\
&\quad \cdot P\{N_n^+(1) = 0, N_n^+(2) = 0\} \\
&\quad + E\{z^{N_{n+1}^+(1)} |_{N_n^+(1)=0, N_n^+(2)>0}\} \\
&\quad \cdot P\{N_n^+(1) = 0, N_n^+(2) > 0\}
\end{aligned} \tag{17}
$$

当 $N_n^+(1)>0$时,因为

$$
N_{n+1}^+(1) = N_n^+(1) - 1 + v_{n+1}(1)
$$

其中 $v_{n+1}(1)$是在一个高优先权顾客的服务时间中新到达的高优先权顾客的数目,其母函数为

$$
\sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \mathrm{d}G_1(t) = g_1(\lambda(1-z))
$$

于是式(17)中的第一项为

$$E\{z^{N_n^+(1)-1+v_{n+1}(1)}|_{N_n^+(1)>0}\}\cdot P\{N_n^+(1)>0\}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}z^jP\{N_n^+(1)=j,N_n^+(1)>0\}z^{-1}g_1(\lambda(1-z))$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}z^jP\{N_n^+(1)=j\}z^{-1}g_1(\lambda(1-z))$$

$$=[\widetilde{P}_1^+(z)-\widetilde{P}_1^+(0)]z^{-1}g_1(\lambda(1-z)) \tag{18}$$

当 $N_n^+(1)=0,N_n^+(2)=0$时,因为

$$N_{n+1}^+(1)=v_{n+1}(1)$$

$$P\{N_n^+(1)=0,N_n^+(2)=0\}=\widetilde{p}_0$$

所以式(17)中第二项为

$$\widetilde{p}_0E\{z^{v_{n+1}(1)}|_{N_n^+(1)=0,N_n^+(2)=0}\}=\widetilde{p}_0E\{z^{v_{n+1}(1)}\}$$

$$=\widetilde{p}_0g_1(\lambda(1-z)) \tag{19}$$

当 $N_n^+(1)=0,N_n^+(2)>0$时,因为

$$N_{n+1}^+(1)-\tilde{v}_{n+1}(1)$$

其中 $\tilde{v}_{n+1}(1)$是在一个低优先权顾客的服务时间中新到达的高优先权顾客的数目,其母函数为

$$E\{z^{\tilde{v}_{n+1}(1)}\}=g_2(\lambda(1-z))$$

于是式(17)第三项为

$$E\{z^{\tilde{v}_{n+1}(1)}\}\cdot P\{N_n^+(1)=0,N_n^+(2)>0\}$$

$$=g_2(\lambda(1-z))[P\{N_n^+(1)=0\}-P\{N_n^+(1)=0,N_n^+(2)=0\}]$$

$$=g_2(\lambda(1-z))[\widetilde{P}_1^+(0)-\widetilde{p}_0] \tag{20}$$

将式(18)、式(19)与式(20)代入式(17),经整理即得

$$\widetilde{P}_1^+(z)=\frac{1}{g_1(\lambda(1-z))-z}\{\widetilde{P}_1^+(0)[g_1(\lambda(1-z))-zg_2(\lambda(1-z))]+\widetilde{p}_0z[g_2(\lambda(1-z))-g_1(\lambda(1-z))]\} \tag{21}$$

其中 $\widetilde{P}_1^+(0)$可利用 $\widetilde{P}_1^+(1)=1$求得,有

$$\widetilde{P}_1^+(0)=\frac{1-\rho_1-(\rho_1-\rho_2)\widetilde{p}_0}{1-\rho_1+\rho_2} \tag{22}$$

2)推导 $P_1^+(z)$ 的表达式.

令

$$H_1(z) = P\{X_{n+1} = 1\} \cdot E\{z^{N_{n+1}^+(1)}|_{X_{n+1}=1}\}$$

则

$$\begin{aligned} H_1(z) &= E\{z^{N_{n+1}^+(1)}\} - P\{X_{n+1} = 0\} \cdot E\{z^{N_{n+1}^-(1)}|_{X_{n+1}=0}\} \\ &= \widetilde{P}_1^+(z) - P\{N_n^+(1) = 0, N_n^+(2) > 0\} \\ &\qquad \cdot E\{z^{N_{n+1}^+(1)}|_{N_n^+(1)=0, N_n^+(2)>0}\} \\ &= \widetilde{P}_1^+(z) - g_2(\lambda(1-z))[\widetilde{P}_1^+(0) - \widetilde{p}_0] \end{aligned} \tag{23}$$

将式(21)代入上式,并令 $z=1$,得

$$H_1(1) = 1 - \widetilde{P}^+(0) + \widetilde{p}_0$$

再由 $H_1(z)$ 的定义,有

$$P\{X_{n+1} = 1\} = H_1(1)$$

于是

$$P\{X_{n+1} = 0\} = 1 - P\{X_{n+1} = 1\} = \widetilde{P}_1^-(0) - \widetilde{p}_0 \tag{24}$$

式(24)代入式(14),得

$$\widetilde{p}_0 = \frac{p_0}{1 + p_0}\widetilde{P}_1^+(0)$$

再结合式(22),得

$$\widetilde{p}_0 = \frac{1}{2}p_0 = \frac{1}{2}(1 - \rho_1 - \rho_2) \tag{25}$$

这样,式(25)代回式(22)及式(23),可得 $H_1(z)$ 的表达式为

$$H_1(z) = \frac{\{1 - g_2(\lambda(1-z)) + (1 - \rho_1 - \rho_2)(1-z)\}g_1(\lambda(1-z))}{2\{g_1(\lambda(1-z)) - z\}} \tag{26}$$

根据 $P_1^+(z)$ 及 $H_1(z)$ 的定义,知

$$P_1^+(z) = E\{z^{N_{n+1}^+(1)}|_{X_{n+1}=1}\} = \frac{H_1(z)}{P\{X_{n+1} = 1\}} \tag{27}$$

式(25)与式(22)比较,即得

$$P\{X_{n+1}=1\}=P\{X_{n+1}=0\}=\frac{1}{2} \tag{28}$$

于是 $P_1^+(z)=2H_1(z)$，结合 $H_1(z)$ 的表达式即得式(15). 利用平均队长 $=\left.\frac{\mathrm{d}P_1^+(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1}$ 即得式(16). 至此定理3证毕.



推论1 对非强拆型的优先权，离开的是高优先权或低优先权顾客的平稳概率各为$\frac{1}{2}$.

推论2 对非强拆型的优先权，顾客离开时刻之后的瞬时，留在系统中高优先权顾客数平稳分布的母函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_1^+(z)&=E\{z^{N_n^+(1)}\}\\&=\frac{g_1(\lambda(1-z))}{2[g_1(\lambda(1-z))-z]}\{[1-g_2(\lambda(1-z))]\\&\qquad+(1-\rho_1-\rho_2)(1-z)\}\\&\quad+\frac{1}{2}g_2(\lambda(1-z))\end{aligned} \tag{29}$$

其中平均队长为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\widetilde{P}_1^+(z)]|_{z=1}=\frac{1}{2}\left[\rho_1+\rho_2+\frac{\lambda^2(\beta_1+\beta_2)}{2(1-\rho_1)}\right] \tag{30}$$

推论3 对非强拆型的优先权，在已知离开是低优先权顾客的条件下，低优先权顾客离开系统后的瞬时，留在系统中高优先权顾客数平稳分布的母函数为

$$\begin{aligned}\hat{P}_1^+(z)&=E\{z^{N_n^+(1)}|_{X_n=0}\}\\&=2\widetilde{P}_1^+(z)-P_1^+(z)\\&=g_2(\lambda(1-z))\end{aligned} \tag{31}$$

其平均队长为 ρ_2，而平稳分布为

$$\hat{p}_j^+=\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}G_2(t),\quad j=0,1,2,\cdots \tag{32}$$

推论4 对非强拆型的优先权，

1)顾客(无论哪一类)离开时，系统中没有顾客(无论哪一类)的平稳概率为

$$P_1 = \widetilde{p}_0 = \frac{1}{2}[1 - (\rho_1 + \rho_2)] \tag{33}$$

2)在已知离开是低优先权顾客的条件下，该类顾客离开时系统中没有顾客(无论哪一类)的平稳概率为

$$P_2 = p_0 = 1 - (\rho_1 + \rho_2) \tag{34}$$

3)在已知离开是高优先权顾客的条件下，该类顾客离开时，系统中没有高优先权顾客的平稳概率为

$$P_3 = 1 - (\rho_1 + \rho_2) + [1 - g_2(\lambda)] \tag{35}$$

其中 $g_2(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG_2(t)$.

4)在已知离开是低优先权顾客的条件下，该类顾客离开时系统中没有高优先权顾客的平稳概率为

$$P_4 = \hat{P}_1^+(0) = g_2(\lambda) \tag{36}$$

5)顾客(无论哪一类)离开时系统中没有高优先权顾客的平稳概率为

$$P_5 = \widetilde{P}_1^+(0) = 1 - \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \tag{37}$$

定理4 对非强拆型的优先权，

1)高优先权顾客的等待时间平稳分布的 LS 变换为

$$w_q^{[1]}(s) = \frac{(1 - \rho_1 - \rho_2)s + \lambda[1 - g_2(s)]}{s - \lambda + \lambda g_1(s)}, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{38}$$

其平均等待时间为

$$\overline{W}_q^{[1]} = \frac{\lambda(\beta_1 + \beta_2)}{2(1 - \rho_1)} \tag{39}$$

2)高优先权顾客的响应时间平稳分布的 LS 变换为

$$w^{[1]}(s) = \frac{\{(1 - \rho_1 - \rho_2)s + \lambda[1 - g_2(s)]\}g_1(s)}{s - \lambda[1 - g_1(s)]} \tag{40}$$

其平均响应时间为

$$\overline{W}^{[1]} = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{2(1 - \rho_1)} + \frac{1}{\mu_1} \tag{41}$$

证明 由于同类顾客是按先到先服务的排队规则，所以在高优先权顾客离开的瞬时，留在系统中的高优先权顾客必是在该离开顾客的等待时间与服务时间中到达的，因此仿照第四章§3的讨论易完成定理4的证明.

■

3)在强拆继续型或非强拆型的优先权下，低优先权顾客的平稳分布

首先，我们必须明确等待时间是指顾客从进入系统的时刻起，直到该顾客刚接受服务为止这段时间. 因此，在强拆继续型的优先权下，低优先权顾客的等待时间不包括在其服务期内由于新到来的高优先权顾客所中断的时间. 于是，不论是强拆继续型或非强拆型的优先权，低优先权顾客在此意义下的等待时间分布都是相同的.

定理 5 无论是强拆继续型或非强拆型的优先权，低优先权顾客等待时间平稳分布 $W_q^{[2]}(t)$ 的 LS 变换为

$$w_q^{[2]}(s) = b^{[1]}(s)\tilde{t}(s + \lambda - \lambda b^{[1]}(s)), \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{42}$$

其中

$$\tilde{t}(s) = \frac{(1 - \rho_1 - \rho_2)s}{s - \lambda + \lambda g_1(s) g_2(s)} \tag{43}$$

而 $b^{[1]}(s)$ 为强拆继续型的优先权下，高优先权顾客的忙期长度分布的 LS 变换，它由定理2所确定.

证明 我们将所考虑的有优先权的排队系统称为系统 S_1，且再引入如下一个无优先权的排队系统 S_2：它是一个 $M/G/1/\infty$ 排队系统，此系统中只有一类顾客，其输入是参数 λ 的 Poisson 流，服务按到达的先后次序进行，而服务时间分布为 $G(t) = G_1(t) * G_2(t)$. 令 $\tilde{T}(t)$ 表示系统 S_2 中顾客等待时间的平稳分布，其 LS 变换为 $\tilde{t}(s)$，则

易知$\tilde{t}(s)$的表达式为式(43)所给定.

在系统S_2中,顾客的等待时间$\tilde{T}$就是该顾客到达时正在系统中的顾客所需进行的服务时间的总和;而在系统S_1中,低优先权顾客的等待时间$W_q^{[2]}$由相互独立的两部分组成:

第一部分是与此低优先权顾客同时到达的高优先权顾客的服务时间,以及由于在这个高优先权顾客的服务时间内新到达的高优先权顾客所造成的延迟.易知这部分的长度等于强拆型高优先权顾客的忙期长度,故分布函数为$B^{[1]}(t)$,其LS变换$b^{[1]}(s)$为定理2确定.

第二部分包括该低优先权顾客到达时看到系统中拥有的顾客(包括高优先权顾客和低优先权顾客)所需进行的服务时间的总和(注意这段时间的长度等于系统S_2中顾客的等待时间$\tilde{T}$),以及由于在这些服务时间$\tilde{T}$内新到达的高优先权顾客所带来的延迟.

设v表示在$\tilde{T}$时间内到达的高优先权顾客数($v=0,1,2,\cdots$),则带来的延迟应该等于v个强拆型高优先权顾客的忙期长度$d_1,\cdots,d_v$之和,且d_i与v独立,它们的分布均为$B^{[1]}(t)$,而v的分布律为

$$P\{v=j\}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}d\tilde{T}(t),\quad j=0,1,2,\cdots \tag{44}$$

因此就有如下关系:

$$W_q^{[2]}=b^{[1]}+(\tilde{T}+d_1+\cdots+d_v) \tag{45}$$

于是

$$\begin{aligned}W_q^{[2]}(t)&=\int_0^t P\{b^{[1]}+d_1+\cdots+d_v\leqslant t-x\mid_{\tilde{T}=x}\}d\tilde{T}(x)\\&=\int_0^t\sum_{j=0}^{\infty}P\{b^{[1]}+d_1+\cdots+d_j\leqslant t-x\}\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x}d\tilde{T}(x)\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^t\underbrace{B^{[1]}(t-x)*\cdots*B^{[1]}(t-x)}_{(j+1)个}\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x}d\tilde{T}(x)\end{aligned} \tag{46}$$

然后取LS变换即得式(42).

推论5 无论是强拆继续型或非强拆型的优先权,低优先权顾客

的平均等待时间为

$$\overline{W}_q^{[2]} = \frac{\lambda^2(\beta_1 + \beta_2) + 2\rho_1(1-\rho_1)}{2\lambda(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} \tag{47}$$

定理6 在强拆继续型的优先权下，低优先权顾客的响应时间平稳分布的 LS 变换为

$$w^{[2]}(s) = w_q^{[2]}(s)g_2(s+\lambda-\lambda b^{[1]}(s)) \tag{48}$$

其平均响应时间为

$$\overline{W}^{[2]} = \overline{W}_q^{[2]} + \frac{1}{(1-\rho_1)} \cdot \frac{1}{\mu_2} \tag{49}$$

证明 因为在强拆继续型的优先权下，低优先顾客的响应时间等于它的等待时间与另外一部分时间之和. 这部分时间为：从该低优先权顾客刚接受服务的时刻起，直到其服务完毕离开系统时为止，其中包括了在其服务时间内到达的所有高优先权顾客的服务时间，类似式(45)，这部分时间可表示为

$$\chi^{[2]} + d_1 + \cdots + d_{\bar{v}} \tag{50}$$

其中 $\chi^{[2]}$ 为该低优先权顾客的服务时间，$\bar{v}$ 为在 $\chi^{[2]}$ 内到达的高优先权顾客数，而且 $\chi^{[2]}, d_i (i=0,1,2,\cdots)$ 相互独立，每个 d_i 与 $\bar{v}$ 相互独立，每个 d_i 有分布 $B^{[1]}(t)$，这样，低优先权顾客的响应时间为

$$W_q^{[2]} + (\chi^{[2]} + d_1 + \cdots + d_{\bar{v}}) \tag{51}$$

而 $W_q^{[2]}$ 与 $\chi^{[2]} + d_1 + \cdots + d_{\bar{v}}$ 独立，$\bar{v}$ 有分布

$$P(\bar{v} = j) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dG_2(t), \quad j = 0,1,2,\cdots$$

于是类似式(46)即可完成定理6的证明.



定理7 在非强拆型的优先权下，低优先权顾客的响应时间平稳分布的 LS 变换为

$$w^{[2]}(s) = w_q^{[2]}(s) \cdot g_2(s), \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{52}$$

其平均响应时间为

$$\overline{W}^{[2]} = \overline{W}_q^{[2]} + \frac{1}{\mu_2} \tag{53}$$

证明 因为在非强拆型的优先权下，低优先权顾客的响应时间等于其等待时间与服务时间之和，所以式(52)显然成立，而式(53)可由式(52)关于 s 的求导，然后令 $s=0$，即可求得.

■

定理8 在已知离开是低优先权顾客的条件下，低优先权顾客离开系统的瞬时，留在系统中该类顾客数的平稳分布的母函数为

$$P_2^+(z) = w^{[2]}(\lambda(1-z)) \tag{54}$$

其平均队长为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[P_2^+(z)]|_{z=1} = \lambda\overline{W}^{[2]} \tag{55}$$

其中在强拆继续型的优先权下，$w^{[2]}(s)$ 与 $\overline{W}^{[2]}$ 由定理6确定；在非强拆型的优先权下，$w^{[2]}(s)$ 与 $\overline{W}^{[2]}$ 由定理7确定.

证明 由于同类顾客是先到先服务的排队规则，所以在低优先权顾客离开系统后的瞬时，留在系统中的该类顾客都是在此离开顾客的响应时间内到达的，故仿照第四章§3的讨论，即可证得定理8.

2. 存储问题

假设某工厂有一个仓库，专门用来存储生产所需要的某种部件，这些部件是由其它工厂供应的. 在生产中，部件不断地被消耗，同时仓库不断地向外厂定货补充，来保持仓库中的储备量，以满足生产的需要. 由于部件的需求量和定货到达时间都受到随机因素的影响，因此，仓库中部件的存储量也随机地变化. 应该如何来设计仓库的大小呢？仓库大了，造价就高，同时存储的部件多了，相应的保管费也高；仓库小了，存储货物太小，缺货时就会影响生产，造成损失. 因此从经济方面考虑，就要寻求总费用最为节省的方案，这就是存储论所要解决的问题.

考虑如下的存储模型：

假设需求过程是一个复合 Poisson 流：需求发生的时刻是参数 λ 的 Poisson 流，在每次需求发生时刻，所提出的需求量等于一个单位的概率为 q，等于两个单位的概率为 $1-q$，其中 $q(0\leqslant q\leqslant 1)$ 为一个常数. 设仓库的最大存储量为 S 个单位，在初始时刻 $t=0$，仓库中装满了 S 个单位，其后每当有需求发生时，只要仓库中有储备，即予供应；没有储备时，就让该需求排队等待. 同时，不管仓库中有无储备，只要发生需求，若其需求量为 k 个单位($k=1$或 $k=2$)，就立即发出 k 个单位的定货，以补充仓库的储备或供应正在等待的需求. 发出的定货由一个等待制的单服务台系统来逐个服务(交付订货)，服务时间(交付订货时间)与尚未交付的定货总数有关，在任意时刻，正在服务的定货将在 Δt 时间内交付的概率为

$$\begin{cases}\mu_1\Delta t+o(\Delta t), & \text{若此时尚未交付的定量总数为 1 个单位}\\ \mu_2\Delta t+o(\Delta t), & \text{若此时尚未交付的定量总数大于 1 个单位}\end{cases}$$

其中 $\mu_1<\mu_2$，说明当尚未交付的定货总数大于1时，交货的速度比总数等于1时的速度加快了. 存储模型见图8.3.



图8.3　存储模型

考虑如下四种费用：

1. 第一类缺货损失费：每个单位的需求缺货单位时间的损失费记为 e_1；

2. 第二类缺货损失费：每发生一个单位的缺货所造成的损失费记为 e_2；

3. 存货保管费：仓库中每个单位的存货放单位时间的保管费记为 e_3；

4. 仓库修建维护费：仓库中存放存货的每个单位空间每个单位时间所需的修建维护费记为 e_4.

令 $f(S)$ 为单位时间的期望总费用，p_n 为尚未交付的定货总数为 n 的平稳概率，则

$$f(S)=e_1\sum_{n=S}^{\infty}(n-S)p_n+\lambda e_2[q+2(1-q)]\sum_{n=S}^{\infty}p_n + e_3\sum_{n=0}^{S}(S-n)p_n+e_4S \tag{56}$$

下面就来寻求使 $f(S)$ 达到最小值的 S.

1）求平稳概率 p_n

由于每到一个单位的需求，就发出一个单位定货，因此很显然定货的发出过程也是同样的复合 Poisson 流.

令 $N(t)$ 为在时刻 t 尚未交付的定货总数，则易知 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一齐次马尔柯夫过程. 令

$$p_n(t)=P\{N(t)=n\},\quad n=0,1,2,\cdots$$

利用类似生灭过程的分析法，可得微分差分方程组：

$$\begin{cases} p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu_1p_1(t) \\ p_1'(t)=q\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu_1)p_1(t)+\mu_2p_2(t) \\ p_n'(t)=(1-q)\lambda p_{n-2}(t)+q\lambda p_{n-1}(t) \\ \qquad -(\lambda+\mu_2)p_n(t)+\mu_2p_{n+1}(t),\quad n\geqslant 2 \end{cases} \tag{57}$$

然后仿照第七章 § 4的处理，有 $p_n=\lim\limits_{t\to\infty}p_n(t)$ 存在，且 $p_n>0,n=0,1,2,\cdots$ 于是在式(57)中令 $t\to\infty$，并令

$$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1},\quad \rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$$

即得

$$\begin{cases} p_1=\rho_1p_0 \\ p_2=\dfrac{\rho_2(1+\rho_1)}{\rho_1}p_1-q\rho_2p_0 \\ p_n=(1+\rho_2)p_{n-1}-q\rho_2p_{n-1}-(1-q)\rho_2p_{n-3},\quad n\geqslant 3 \end{cases} \tag{58}$$

记$\{p_n, n \geqslant 0\}$的母函数为

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j, \quad |z| \leqslant 1$$

则由式(58),取母函数,即得

$$P(z) = p_0 \frac{1 + (\rho_1 - \rho_2)z}{1 - \rho_2 z - (1 - q)\rho_2 z^2} \tag{59}$$

令 $z=1$,结合 $P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$,即得

$$p_0 = \frac{1 - (2 - q)\rho_2}{1 + \rho_1 - \rho_2} \tag{60}$$

由于 $\mu_1 < \mu_2$,故 $\rho_1 > \rho_2$,从而由式(60)的分母>0,立即可推知其分子

$$1 - (2 - q)\rho_2 > 0$$

即

$$(2 - q)\rho_2 < 1 \tag{61}$$

令 $\rho = \dfrac{(2 - q)\lambda}{\mu} = (2 - q)\rho_2$,则 $\rho < 1$. 将式(60)代入式(59),就得到平稳分布$\{p_n, n \geqslant 0\}$的母函数表达式:

$$P(z) = \frac{1 - \rho}{(1 + \rho_1 - \rho_2)} \frac{1 + (\rho_1 - \rho_2)z}{[1 - \rho_2 z - (1 - q)\rho_2 z^2]} \tag{62}$$

由于 $P(z)$的分母的两个根为

$$\frac{\rho_2 \pm \sqrt{\rho_2^2 + 4\rho_2(1 - q)}}{-2\rho_2(1 - q)}$$

它们都是实根,故可将 $P(z)$分解成部分分式之和,并展开成幂级数,得

$$P(z) = \frac{1 - \rho}{1 + \rho_1 - \rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\cdot \left\{ \frac{2(1 - q)\rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 + \Delta)}{\Delta(\Delta + \rho_2)} \left[\frac{2\rho_2(1 - q)}{\rho_2 + \Delta} \right]^n \right.$$

$$+\frac{2(1-q)\rho_2-(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\Delta)}{\Delta(\Delta-\rho_2)}\left[\frac{2\rho_2(1-q)}{\rho_2-\Delta}\right]^n\Bigg\}z^n$$

其中 $\Delta=\sqrt{\rho_2^2+4\rho_2(1-q)}$，因此

$$p_n=\frac{1-\rho}{1+\rho_1-\rho_2}(-1)^n$$

$$\cdot\left\{\frac{2(1-q)\rho_2-(\rho_1-\rho_2)(\rho_2+\Delta)}{\Delta(\Delta+\rho_2)}\left[\frac{2\rho_2(1-q)}{\rho_2+\Delta}\right]^n\right.$$

$$\left.+\frac{2(1-q)\rho_2-(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\Delta)}{\Delta(\Delta-\rho_2)}\left[\frac{2\rho_2(1-q)}{\rho_2-\Delta}\right]^n\right\}$$

$$n=0,1,2,\cdots \tag{63}$$

2)寻找使单位时间内期望总费用 $f(S)$ 达到最小值的 S^*

我们称 S^* 为(全局)最优存储量，若 $f(S)$ 在 $S=S^*$ 处达到最小值，又称 S_0 为局部最优存储量，若

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}f(S_0)\leqslant f(S_0+1)\\ f(S_0)\leqslant f(S_0-1)\end{array}\right\}, & S_0>0\text{ 时}\\ f(S_0)\leqslant f(S_0+1), & S_0=0\text{ 时}\end{cases} \tag{64}$$

令

$$\Delta f(S)=f(S+1)-f(S)$$

则由 $f(S)$ 的定义，得

$$\Delta f(S)=(e_1+e_3)\sum_{n=0}^{S}p_n-e_2\lambda[q+2(1-q)]p_S-e_1+e_4 \tag{65}$$

容易得出，S_0 为局部最优存储量的必要充分条件是：

$$\begin{cases}\Delta f(S_0-1)\leqslant 0\leqslant \Delta f(S_0), & \text{若 } S_0>0\\ 0\leqslant \Delta f(S_0), & \text{若 } S_0=0\end{cases} \tag{66}$$

下面分两种情形来讨论：

(1)若 $e_1+e_3-e_2\lambda[q+2(1-q)]\geqslant 0$，则由式(65)，

$$
\begin{aligned}
&\Delta f(S+1) \\
&=(e_1+e_3)\sum_{n=0}^{S}p_n+\{e_1+e_3-e_2\lambda[q+2(1-q)]\}p_{S+1} \\
&\quad -e_1+e_4 \\
&\geqslant(e_1+e_3)\sum_{n=0}^{S}p_n-e_1+e_4 \\
&\geqslant(e_1+e_3)\sum_{n=0}^{S}p_n-e_2\lambda[q+2(1-q)]p_S-e_1+e_4 \\
&=\Delta f(S) \qquad (67)
\end{aligned}
$$

因而任一局部最优存储量 S_0 一定是全局最优存储量. 事实上,若 S_0 为局部最优,则式(66)成立,故由式(67),得

$$
\begin{cases}\cdots\leqslant\Delta f(S_0-1)\leqslant 0\leqslant\Delta f(S_0)\leqslant\Delta f(S_0+1)\leqslant\cdots, & \text{若 } S_0>0 \\ 0\leqslant\Delta f(S_0)\leqslant\Delta f(S_0+1)\leqslant\cdots, & \text{若 } S_0=0\end{cases}
$$

于是

$$
\begin{cases}\cdots\leqslant f(S_0-1)\leqslant f(S_0)\leqslant f(S_0+1)\leqslant\cdots, & \text{若 } S_0>0 \\ 0\leqslant f(S_0)\leqslant f(S_0+1)\leqslant\cdots, & \text{若 } S_0=0\end{cases}
$$

这就说明 S_0 为全局最优.

当 $e_3+e_4>0$ 时,最优存储量 S^* 是存在的,因为当 $S\to\infty$ 时,极限 $\lim\limits_{S\to\infty}\Delta f(S)=e_3+e_4>0$,因此总存在 S^*,使得 $\Delta f(S^*)\geqslant 0$.

当 $e_3=e_4=0$ 时,由式(65),对任意 S,

$$
\Delta f(S)=-e_1\sum_{n=S+1}^{\infty}p_n-e_2\lambda[q+2(1-q)]p_S\leqslant 0
$$

因此,虽然极限 $\lim\limits_{S\to\infty}\Delta f(S)=0$,但可能 $\Delta f(S)$ 永远小于零而达不到零,此时全局最优存储量 S^* 就不存在,而只有当 $\Delta f(S)$ 能首次变成0时,对应的 S^* 才是全局最优存储量. 事实上,$e_3=e_4=0$ 的情形即存储模型中只有缺货损失而没有存货保管费和仓库修建维护费的情形,

因此很自然地，仓库存储量 S 不管怎样增大，决不会使总费用增加，所以这种情形实际上是没有讨论价值的.

于是，当最优存储量 S^* 存在时，可以这样安排寻求 S^* 的算法：

从 $S=0$ 开始，逐个计算 $\Delta f(S)$ 的值，算到 $\Delta f(S)$ 的值首次变为非负值时为止，这个使 $\Delta f(S)$ 首次变为非负值的 S 就是全局最优存储量 S^*.

(2)若 $e_1+e_3-e_2\lambda[q+2(1-q)]<0$，则由式(65)，

$$\Delta f(S)=(e_1+e_3)\sum_{n=0}^{S-1}p_n+\{e_1+e_3-e_2\lambda[q+2(1-q)]\}p_S-e_1+e_4$$

$$\geqslant(e_1+e_3)\sum_{n=0}^{S-1}p_n+\{e_1+e_3-e_2\lambda[q+2(1-q)]\}\cdot\left(1-\sum_{n=0}^{S-1}p_n\right)-e_1+e_4$$

即

$$\Delta f(S)\geqslant e_3-e_2\lambda[q+2(1-q)]+e_2\lambda[q+2(1-q)]\sum_{n=0}^{S-1}p_n+e_4 \tag{68}$$

当 $e_3+e_4>0$ 时，最优存储量 S^* 是存在的，因为，当 $S\to\infty$ 时，式(68)的右端的极限为 $e_3+e_4>0$，所以，式(68)的右端就能在有限的 S 值上变为非负(记首次这个 S 值为 S_1). 由于式(68)的右端当 S 增加时是非降的，因此，它一旦在 S_1 处变成非负后，其后的量均为非负，于是当 $S\geqslant S_1$ 时，$\Delta f(S)\geqslant 0$，故

$$f(S_1)\leqslant f(S_1+1)\leqslant f(S_2+2)\leqslant\cdots$$

显见，最优存储量 S^* 就是使 $f(0),f(1),\cdots,f(S_1)$ 中取最小值的那个 S.

而当 $e_3+e_4=0$ 时，如前所述，这种情形是没有讨论价值的.

于是，当全局最优存储量 S^* 存在时，此种情形可以这样来安排寻求 S^* 的算法：

从 $S=0$ 开始，逐个计算 $f(S)$ 的值，计算到使式(68)右端首次变为非负值的那个 S(记为 S_1)时为止，然后在 $f(0),f(1),\cdots,f(S_1)$ 中取最小值的那个 $S(0\leqslant S\leqslant S_1)$ 就是 S^*，从而 $0\leqslant S^*\leqslant S_1<\infty$.

第九章　休假排队系统

§1　背景与规则

1. 背景

利用闲期对服务设施进行调整维修，或者服务员在闲期中去休假，或从事辅助性工作的排队系统，我们称为**休假排队系统**. 由于在计算机系统、通信系统、管理工程等领域的重要应用，这类排队系统受到了人们的普遍关注. 由于不同领域中发生的实际问题各种各样，由这些实际问题导致的休假排队问题也千变万化，因此我们下面仅对诱发休假排队的典型问题作些概述.

1)辅助工作诱发的休假

在负载较低的排队系统中，为了有效利用闲期，可增设某种辅助性、维持性工作，一旦系统空闲，服务员即开始一项辅助工作，完成后视系统中有无顾客而恢复服务或从事下一项辅助工作. 把辅助工作时间看成"服务员休假". 问题是：怎样设置辅助工作，才能既较好地满足顾客的需要，又使系统有较大效益?这类模型已在计算机的中心处理机运行和柔性生产管理过程中得到了重要的应用.

2)服务员的休假

在负载较高的排队系统中，服务员的工作强度是相当大的，为了工作人员的身体健康和在下一阶段对工作的投入，公司往往让服务员在连续繁忙一段时间后去休假，休假后再回到系统上班. 问题是服务员的休假如何影响系统的队长与顾客的等待时间? 怎样给服务员一个合理的休假期?

3)设备保养诱发的休假

为了保持服务系统长时间有效运行，一旦系统空出，就对服务设

备进行一次例行保养. 实施保养的时间(可以是随机变量)视为“服务员的休假”,此期间到达的顾客需等待直到完成保养后才依次被接待. 我们关心的典型问题是:例行保养怎样影响系统的队长和等待时间? 如何制定最优的保养策略?

4)冷启动系统诱发的休假

在许多实际系统中,为了降低成本,当服务系统中无顾客时应关闭服务设备,当有顾客到达再次工作时通常需要一个随机的启动时间. 启动期可以看成是系统闲期最先到达顾客触发的“休假”,该顾客及在启动期内到达的其他顾客均需等待启动结束后才能得到服务,例如复印系统就属于这种情形.

5)循环服务诱发的休假

一服务员按某种规则轮流为若干个顾客队列服务,这种排队现象常发生于计算机系统、通信网络、有竞争机制的港口服务等实际场合. 把注意力集中于一特定队列,服务员接待其他队列及在诸队列间的转移时间可视为“休假”. 这里,休假长度取决于服务员在各队列处的服务规则,也取决于各队列的状态,因此,休假时间分布通常是未知的.

另外,N－策略排队系统,T－策略排队系统,D－策略排队系统,以及优先权排队系统等都可纳入休假排队的框架.

2. 休假规则

描述系统的休假行为,只给出休假时间分布是不够的,还需知道导致休假开始和终止的机制. 当然,可以根据实际需要引入各种各样的休假行为. 下面我们列举一些在文献和应用上经常出现的休假规则.

1)空竭服务(exhaustive service)规则

服务员一旦开始为顾客服务,便一直持续到系统内无顾客,休假只能在系统内无顾客时开始.

2)闸门服务(gated service)规则

当服务员从休假中转来并遇到有顾客等待,他只服务已在场的

全部顾客，而不包括在这些服务内又到达的顾客，然后便开始另外一次休假.

3)限量服务(limited service)规则

在每一忙期内最多服务 K 个顾客(K 为一个已知的正整数)，当完成 K 个服务或系统中无足够顾客时开始休假.

4)贝努里(Bernouli)休假规则

每一服务完成后，若系统空出，必定休假；否则，以概率 p 休假，以概率 $1-p$ 为下一顾客服务. 一次休假结束，若系统内仍无顾客，就接着一次新的休假，直到某次休假后至少有一顾客等待则恢复服务.

5)一般非空竭服务(general nonexhaustive service)休假规则

泛指在系统中有顾客时也可以开始休假的种种情况. 这里，休假对服务可以是抢先的或非抢先的，前者指休假可在一服务的进行中开始，后者指休假仅在服务完成时开始. 于是贝努里休假规则就是一种非抢先的一般非空竭服务.

以上是常见的以触发休假开始为基础的休假规则. 下面再介绍几种以休假终止机制为基础的休假规则.

6)多重休假(multiple vacation)规则

若休假结束时仍无顾客，就开始另一次休假；若休假结束时系统内至少有一个顾客等待，就开始新的忙期. 多重休假规则的特点是服务员只有忙期和假期两种状态.

7)单重休假(single vacation)规则

若休假结束时系统中已有顾客等待，就开始新的忙期，否则，进入通常的闲期. 单重休假规则下服务员可处于忙期、假期和闲期三种状态之一. 需要指出的是，假期与闲期是不同的，对顾客而言，两者的区别在于其间第一个到达顾客是否立即被接待，对服务系统而言，假期中服务员可不在岗，而闲期中虽无顾客，但服务员必须在岗.

8)一般休假规则(general vacation rules)

泛指所有其它终止休假而开始服务的行为，例如，每一忙期后最多休假 m 次，每一忙期后休假次数是一随机变量，甚至依赖于系统

中顾客数 n 以某个概率 p_n 终止休假等.

另外，文献中还有一些其它的休假行为，如递减服务(decrementing service)规则，门限式(throshold vacation)休假规则. 但是，系统休假规则的完整描述，应该包括休假的触发机制和终止机制两个方面.

§2 空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在该系统中，每当系统变空时，服务员就去进行休假，若休假结束时系统中至少有一个顾客，服务员就立即为顾客服务，直到系统再次变空时又去进行新的休假. 假定服务员的休假时间序列 $\{V_i, i\geq 1\}$ 独立、服从相同一般分布 $V(t)$，并且独立于到达和服务过程，其它假设条件与标准的 $M/G/1/\infty$ 排队系统一样(见第四章). 进一步设 $t=0$ 时刻系统中无顾客时，服务员不去进行休假(但平稳结果与此假设无关).

2. 嵌入马尔柯夫链

对于空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，若令 T_n^+ 表示第 n 个顾客服务完毕的离去时刻，N_n^+ 表示第 n 个顾客服务完毕离开时留在系统中的顾客数，$n\geq 1$. 若取服务完成和休假结束这些时刻作为嵌入时刻点，且令

$$J_{t_n} = \begin{cases} 1, & \text{若时刻 } t_n \text{ 为服务完成时刻} \\ 0, & \text{若时刻 } t_n \text{ 为休假结束时刻} \end{cases} \tag{1}$$

则 $\{N_{t_n}^+, J_{t_n}; n\geq 1\}$ 是队长过程 $\{N(t), t\geq 0\}$ 的嵌入马尔柯夫链，其中 $N_{t_n}^+$ 表示嵌入时刻点的队长. 仿照第四章 §1 的讨论，嵌入马尔柯夫链 $\{N_{t_n}^+, J_{t_n}, n\geq 1\}$ 是状态空间 $\{(j,i): j=0,1,2,\cdots; i=0,1\}$ 上不可约、非周期的齐次马尔柯夫链，且

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

是$\{N_{t_n}^+, J_{t_n}; n \geqslant 1\}$正常返的充要条件. 记

$$p_j^+ = \lim_{n\to\infty} P\{N_{t_n}^+ = j |_{J_{t_n}=1}\}, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{2}$$

则当$\rho<1$时, $\{p_j^+, j\geqslant 0\}$存在,构成一概率分布,而且p_j^+满足方程

$$p_j^+ = \frac{p_0^+}{1-h_0}\sum_{k=1}^{j+1} h_k a_{j-k+1} + \sum_{k=1}^{j+1} p_k^+ a_{j-k+1}, \quad j \geqslant 0 \tag{3}$$

其中$h_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dV(t)$, $a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dG(t)$, $k\geqslant 0$. 于是, $\{p_j^+, j\geqslant 0\}$的母函数为

$$\begin{aligned} P^+(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j p_j^+ \\ &= \frac{p_0^+ g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z}\cdot\frac{1-v(\lambda(1-z))}{1-v(\lambda)}, \\ &\qquad |z|<1 \end{aligned} \tag{4}$$

其中$v(\lambda) = h_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dV(t)$.

由于$P^+(1)=1$,在式(4)中令$z\to 1^-$,得

$$p_0^+ = \frac{(1-\rho)[1-v(\lambda)]}{\lambda E[V]} \tag{5}$$

于是

$$P^+(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z}\cdot\frac{1-v(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)E[V]}, \quad |z|<1 \tag{6}$$

3. 队长

下面我们将提出"**服务员忙期**"这一概念,利用第四章§2的分析技术,直接研究该休假排队系统队长的瞬态和稳态分布.

我们定义"**服务员忙期**"是从服务员开始为顾客服务的时刻起,直到系统再次变空为止这段时间. 显然,此处的服务员忙期长度与标准$M/G/1/\infty$排队系统中的(系统)忙期长度有相同的概率特性. 因此,若令b表示由一个顾客开始的"服务员忙期"长度,且

$$B(t) = P\{b \leqslant t\}, b(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t), \quad \mathscr{R}(s) > 0$$

则 $b(s)$是方程 $z = g(s + \lambda(1 - z))$ 在 $|z| < 1$ 内的惟一解，且 $B(t)$可表示为

$$B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!} dG^{(j)}(x) \tag{7}$$

而

$$\lim_{t \to \infty} B(t) = \begin{cases} 1, & \rho \leqslant 1 \\ \omega < 1, & \rho < 1 \end{cases} \tag{8}$$

$$E[b] = \begin{cases} \rho/\lambda(1 - \rho), & \rho < 1 \\ \infty, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \tag{9}$$

显然，第四章 § 2 中的定理 1 在此处仍然成立.

我们定义“**系统闲期**”是从系统刚变空的时刻起，直到其后第一个顾客到达系统为止. 显然“系统闲期”长度 $\hat{\tau}$ 有负指数分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geqslant 0$. 而“**系统忙期**”是指从有顾客到达空闲的系统的时刻起，直到系统再次变空为止. 显然，当“系统忙期”开始时，而服务员还在休假，此时到达的顾客只有等待服务员从休假转来再接受服务.

假定 $N(t)$表示时刻 t 系统的队长，且令

$$p_{ij}(t) = P\{N(t) = j|_{N(0)=i}\},$$

$$p_{ij}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{ij}(t) dt, \quad i、j \geqslant 0$$

定理 1 对 $\mathscr{R}(s) > 0, i \geqslant 1$，有

$$p_{00}^*(s) = \frac{1 - f(s)}{s} \left\{ 1 + \frac{f(s)b(s)[1 - v(s + \lambda)]}{1 - v(s + \lambda - \lambda b(s))} \right\} \tag{10}$$

$$p_{i0}^*(s) = \frac{b^i(s)[1 - f(s)][1 - v(s + \lambda)]}{s[1 - v(s + \lambda - \lambda b(s))]} \tag{11}$$

证明 令 $s_k = \sum_{i=1}^{k} V_i, l_k = \sum_{i=1}^{k} \tau_i, k \geqslant 1$，且 $s_0 = l_0 = 0$. 因为在时

刻 t 系统中没有顾客当且仅当时刻 t 处于"系统闲期"，所以

$$
\begin{aligned}
p_{00}(t) = & [1 - F(t)] + \int_0^t [1 - F(t-x)] \mathrm{d}[F(x) * B(x)] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 + b_1 + s_k \leqslant t, s_{k-1} \leqslant \hat{\tau}_2 < s_k; N(t) = 0\} \\
= & \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-x) \mathrm{d}[F(x) * B(x)] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 + b_1 + s_k \leqslant t; s_{k-1} \leqslant \hat{\tau}_2 < s_k; \\
& \qquad s_{k-1} \leqslant \hat{\tau}_2 + l_{j-1} \leqslant s_k < \hat{\tau}_2 + l_j; N(t) = 0\} \\
= & \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-x) \mathrm{d}[F(x) * B(x)] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} p_{j0}(t-x-y-u) \frac{(\lambda u)^j}{j!} \\
& \qquad \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(y+u)} \mathrm{d}V(u) \mathrm{d}V^{(k-1)}(y) \mathrm{d}[F(x) * B(x)]
\end{aligned} \tag{12}
$$

其中，b_1 表示"服务员忙期长度"，$\hat{\tau}_k$ 表示第 k 个"系统闲期"长度，$k \geqslant 1$. 类似地，对 $i \geqslant 1$，有

$$
\begin{aligned}
p_{i0}(t) = & \int_0^t \bar{F}(t-x) \mathrm{d}B^{(i)}(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-y} p_{j0}(t-x-y-u) \frac{(\lambda u)^j}{j!} \\
& \qquad \mathrm{e}^{-\lambda(y+u)} \mathrm{d}V(u) \mathrm{d}V^{(k-1)}(y) \mathrm{d}[B^{(i)}(x)]
\end{aligned} \tag{13}
$$

式(12)和式(13)的 L 变换分别为

$$
\begin{aligned}
p_{00}^*(s) = & \frac{1 - f(s)}{s} + \frac{f(s) b(s) [1 - f(s)]}{s} \\
& + \frac{f(s) b(s)}{1 - v(s+\lambda)} \sum_{j=1}^{\infty} p_{j0}^*(s) \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \mathrm{d}V(t)
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$p_{i0}^*(s)=\frac{b^i(s)[1-f(s)]}{s}+$$

$$\frac{b^i(s)}{1-v(s+\lambda)}\sum_{j=0}^{\infty}p_{j0}^*(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{d}V(t) \quad (15)$$

由式(14)与式(15)得 $p_{00}^*(s)$ 与 $p_{i0}^*(s)$ 的关系式：

$$p_{i0}^*(s)=\frac{1}{f(s)b(s)}\left\{p_{00}^*(s)-\frac{[1-f(s)][1+f(s)b(s)]}{s}\right\},$$

$$i\geqslant 1 \quad (16)$$

然后将式(16)代回式(14)，经过整理即得式(10)，再结合式(16)即得式(11)．定理 1 证毕．

■

定理 2 对 $\mathscr{R}(s)>0,i\geqslant 1,j\geqslant 0$，有

$$p_{0j}^*(s)=\frac{f(s)}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\{[1-v(s+\lambda)]q_j^*(s)+\delta_j^*(s)\}$$

$$(17)$$

$$p_{ij}^*(s)=\sum_{k=1}^{i}q_{j-(i-k)}^*(s)b^{k-1}(s)$$

$$+\frac{b^{i-1}(s)}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\{[v(s+\lambda-\lambda b(s))$$

$$-v(s+\lambda)]q_j^*(s)+\delta_j^*(s)\}$$

$$(18)$$

其中 $q_j^*(s)$ 由第四章§2 中定理 1 确定，$j\geqslant 1$；而

$$\delta_j^*(s)=b(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}V(t)\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{d}t$$

$$+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_{j-k}^*(s)}{b^k(s)}\{v(s+\lambda-\lambda b(s))$$

$$-\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda b(s)t]^i}{i!}\mathrm{d}V(t)\},\quad j\geqslant 1$$

证明 由于时刻 t 队长等于 j，当且仅当时刻 t 处于“系统忙期”

中，而且队长为 $j(j\geqslant 1)$，所以

$$
\begin{aligned}
p_{0j}(t) =& \int_0^t Q_j(t-x)\mathrm{d}F(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 + b_1 + \hat{\tau}_2 \leqslant t < \hat{\tau}_1 + b_1 + s_k; \hat{\tau}_2 \geqslant s_{k-1}; \\
&\qquad l_{j-1} \leqslant t - (\hat{\tau}_1 + b_1 + \hat{\tau}_2) < l_j\} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P\{\hat{\tau}_1 + b_1 + s_k \leqslant t; s_{k-1} \leqslant \hat{\tau}_2 < s_k; \\
&\qquad s_{k-1} \leqslant \hat{\tau}_2 + l_{m-1} \leqslant s_k < \hat{\tau}_2 + l_m; N(t) = j\} \\
=& \int_0^t Q_j(t-x)\mathrm{d}F(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x} \bar{V}(t-x-y)\frac{[\lambda(t-x-y)]^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)} \cdot \\
&\qquad \mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}[F(x)*B(x)] \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y} p_{mj}(t-x-y-u)\frac{(\lambda u)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda(y+u)} \cdot \\
&\qquad \mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}[F(x)*B(x)] \quad (19)
\end{aligned}
$$

其中 $Q_j(t)$ 由第四章§2 中的式(5)确定，$j\geqslant 1$.

对 $i\geqslant 1$，类似有

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t) =& P\{b^{<i>} > t \geqslant 0; N(t) = j\} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x} \bar{V}(t-x-y)\frac{[\lambda(t-x-y)]^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)} \cdot \\
&\qquad \mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y} p_{mj}(t-x-y-u)\frac{(\lambda u)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda(y+u)} \cdot \\
&\qquad \mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

其中 $b^{<i>}$ 表示从 i 个顾客开始的“服务员忙期”长度，$i\geqslant 1$. 由于到达是 Poisson 流，所以类似第四章§2 中的式(18)，得

$$P\{b^{<i>} > t \geqslant 0; N(t) = j\} = \sum_{k=1}^{i} Q_{j-i+k}(t) * B^{(k-1)}(t), \quad i \geqslant 1 \tag{21}$$

式(19)与式(20)的 L 变换为

$$p_{0j}^*(s) = f(s)q_j^*(s) + \frac{f(s)b(s)}{1 - v(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} dt + \frac{f(s)b(s)}{1 - v(s+\lambda)} \sum_{m=1}^\infty p_{mj}^*(s) \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} dV(t), \quad j \geqslant 1 \tag{22}$$

$$p_{ij}^*(s) = \sum_{k=1}^{i} q_{j-i+k}^*(s) b^{k-1}(s) + \frac{b^i(s)}{1 - v(s+\lambda)} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} dt + \frac{b^i(s)}{1 - v(s+\lambda)} \sum_{m=1}^\infty p_{mj}^*(s) \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} dV(t), \quad i \geqslant 1, j \geqslant 1 \tag{23}$$

由式(22)与式(23)可得关系式

$$p_{ij}^*(s) = \sum_{k=1}^{i} q_{j-i+k}^*(s) b^{k-1}(s) + \frac{b^{i-1}(s)}{f(s)} [p_{0j}^*(s) - f(s) q_j^*(s)] \tag{24}$$

然后将式(24)代回式(22),并注意到当 $j \leqslant 0$ 时,$q_j^*(s) = 0$,得

$$\begin{aligned} p_{0j}^*(s) &= f(s)q_j^*(s) + \frac{f(s)b(s)}{1 - v(s+\lambda-\lambda b(s))} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \bar{V}(t) \frac{(\lambda t)^j}{j!} dt \\ &\quad + \frac{f(s)b(s)}{1 - v(s+\lambda-\lambda b(s))} \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=k}^{j-1+k} b^{k-1}(s) q_{j-i+k}^*(s) \cdot \\ &\quad \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dV(t), \quad j \geqslant 1 \end{aligned} \tag{25}$$

而式(25)中右边第三项为

$$\frac{f(s)}{1 - v(s+\lambda-\lambda b(s))} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{q_{j-k}^*(s)}{b^k(s)} \cdot \Big\{ v(s+\lambda-\lambda b(s)) -$$

$$\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda b(s)t]^i}{i!}dV(t)\Big\},\quad j\geqslant 1 \tag{26}$$

于是经过整理即得式(17). 再结合式(24)即得式(18). 至此定理 2 证毕. ▓

定理 3 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j=0,1,2,\cdots$ 则对任意初始状态,有

1)当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}\geqslant 1, p_j=0, j\geqslant 0$,从而$\{p_j, j\geqslant 0\}$不构成概率分布;

2)当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 时,$\{p_j, j\geqslant 0\}$存在,且构成概率分布,进一步有递推式:

$$p_0=(1-\rho)\frac{1-v(\lambda)}{\lambda E[V]} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}p_j=\frac{(1-\rho)}{E[V]}\Big\{&[1-v(\lambda)]\theta_j+\int_0^\infty e^{-\lambda t}\overline{V}(t)\frac{(\lambda t)^j}{j!}dt\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\Big[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dV(t)\Big]\Big\},\quad j\geqslant 1\end{aligned} \tag{28}$$

其中 $$\begin{aligned}\theta_j=\frac{1}{g(\lambda)}\Big\{&\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\overline{G}(t)dt\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dG(t)]\Big\},\quad j\geqslant 1\end{aligned}$$

而且当 $j\leqslant 0$ 时,$\sum\limits_{k=1}^{j}=0$;$v(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dV(t)$;$g(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dG(t)$

证明 仿照第四章§2 中定理 3 的证明. ▓

推论 1 令 $P_v(z)$和 $P(z)$分别表示空竭服务多重休假的 $M/G/$

$1/\infty$排队系统与标准的$M/G/1/\infty$排队系统平稳队长分布的概率母函数，则

$$P_v(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z}\cdot\frac{1-v(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)E[V]}$$

$$=P(z)\cdot\frac{1-v(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)E[V]},\quad |z|<1 \tag{29}$$

证明　按母函数定义，直接计算即可.

■

推论1表明，对空竭服务多重休假的$M/G/1/\infty$排队系统，稳态队长可分解成独立的两部分之和：一部分是对应标准的$M/G/1/\infty$排队系统的稳态队长；另一部分是由休假引起的附加顾客数，等于在剩余休假时间$\hat{V}$内到达的顾客数，而且剩余休假时间$\hat{V}$的分布函数

$$\hat{V}(t)=P\{\hat{V}\leqslant t\}$$

$$=\frac{1}{E[V]}\int_0^t[1-V(x)]\mathrm{d}x,\quad t\geqslant 0 \tag{30}$$

恰是休假时间分布$V(t)$的平衡分布.而在$\hat{V}$内到达k个顾客的概率为

$$\frac{1}{E[V]}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\overline{V}(t)\mathrm{d}t,\quad k\geqslant 0 \tag{31}$$

因此，这就是空竭服务多重休假的$M/G/1/\infty$排队系统稳态队长的随机分解结果.由于无休假系统中相应指标已得到深入研究，因此随机分解的意义在于，把休假排队稳态队长的研究转化为对附加顾客数的研究.

推论2　对空竭服务多重休假的$M/G/1/\infty$排队系统，当$\rho<1$时，有

$$p_j^+=p_j,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{32}$$

推论3　对空竭服务多重休假的$M/G/1/\infty$排队系统，当$\rho<1$时，其平均队长为

$$\overline{N} = \rho + \frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda E[V^2]}{2E[V]} \tag{33}$$

4. 等待时间与逗留时间

假定顾客是按先到先服务的规则被服务的. 在空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统中，由于顾客接受服务完毕离开系统时留在系统中的顾客数等于在该顾客的逗留时间内到达的顾客数，因此，稳态队长与逗留时间仍然成立着如下的著名关系式(平衡下)：

$$P_v(z) = w(\lambda(1-z)), \quad |z| < 1 \tag{34}$$

于是，我们有如下结论.

定理 4 对空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在 $\rho<1$ 下，有

1) $$w_q(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda[1-g(s)]} \cdot \frac{1-v(s)}{sE[V]}, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{35}$$

2) $$w(s) = \frac{s(1-\rho)g(s)}{s-\lambda[1-g(s)]} \cdot \frac{1-v(s)}{sE[V]}, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{36}$$

而且平均等待时间与平均逗留时间为

$$\overline{W}_q = \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{E[V^2]}{2E[V]} \tag{37}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{E[V^2]}{2E[V]} \tag{38}$$

式(35)就是稳态等待时间的随机分解，表明稳态等待时间可分解成独立的两部分之和：一部分是对应的 $M/G/1/\infty$ 排队系统的稳态等待时间；另一部分是由休假引起的时间延迟，且时间延迟恰是剩余假期时间 $\hat{V}$，其分布由式(30)给出.

推论 4　对空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，Little 公式成立.

§3　空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在该系统中，每当系统变空时，服务员就去进行一次休假，若休假结束时系统中至少有一个顾客，服务员就立即为顾客服务，直到系统再次变空时又去休假；若休假结束时系统中仍然没有顾客，服务员就进入通常的闲期，直到下一个顾客的到来. 因此，在空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统中，服务员处于忙期（为顾客进行服务的时期）、假期和闲期三种状态之一. 假定服务员的休假时间序列 $\{V_i, i\geqslant 1\}$ 独立、服从一般分布 $V(t)$，且独立于到达和服务过程，而其它假设条件与标准的 $M/G/1/\infty$ 排队系统一样. 进一步设 $t=0$ 时刻系统中无顾客时服务员不去进行休假（但平衡结果与此假设无关）.

2. 嵌入马尔柯夫链

与本章 §2 一样，对空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，若取服务完成和休假结束时刻为嵌入时刻点，则 $\{N_{t_n}^+, J_{t_n}; n\geqslant 1\}$ 是队长过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 的嵌入马尔柯夫链，其中 $N_{t_n}^+$ 表示嵌入时刻点的队长，且

$$J_{t_n}=\begin{cases}1, & \text{若 } t_n \text{ 为服务完成时刻}\\ 0, & \text{若 } t_n \text{ 为休假结束时刻}\end{cases}$$

于是，仿照第四章 §2 的讨论，可证明 $\{N_{t_n}^+, J_{t_n}; n\geqslant 1\}$ 是状态空间 $\{(j,i); j=0,1,2,\cdots; i=0,1\}$ 上不可约、非周期的齐次马尔柯夫链，且 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 是 $\{N_{t_n}^+, J_{t_n}; n\geqslant 1\}$ 正常返的充要条件，记

$$p_j^+ = \lim_{n\to\infty} P\{N_{t_n}^+ = j|_{J_{t_n}=1}\}, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

则当 $\rho<1$ 时，$\{p_j^+, j\geqslant 0\}$ 存在，构成概率分布，而且 p_j^+ 满足方程

$$p_j^+ = p_0^+\left(\sum_{k=1}^{j+1} h_k a_{j-k+1} + h_0 a_j\right) + \sum_{k=1}^{j+1} p_k^+ a_{j-k+1}, \quad j \geqslant 0 \qquad (1)$$

其中 $h_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dV(t), a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dG(t), k\geqslant 0$. 于是 $\{p_j^+, j\geqslant 0\}$ 的概率母函数为

$$\begin{aligned} P^+(z) &= \sum_{j=0}^\infty z^j p_j^+ \\ &= \frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z} \\ &\quad \cdot \frac{1-v(\lambda(1-z))+(1-z)v(\lambda)}{(1-z)\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}}, \quad |z|<1 \end{aligned} \qquad (2)$$

其中，$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}dG(t), v(s) = \int_0^\infty e^{-st}dV(t)$.

3. 队长

对空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，仿照本章 §2 的讨论，类似有如下结果：

定理 1 对 $\mathscr{R}(s)>0, i\geqslant 1$，有

$$p_{00}^*(s) = \frac{1-f(s)}{s}\left\{1 + \frac{f(s)b(s)}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \qquad (3)$$

$$p_{i0}^*(s) = \frac{[1-f(s)]b^i(s)}{s\{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))\}}, \quad i\geqslant 1 \qquad (4)$$

证明

$$p_{00}(t)=\bar{F}(t)+\int_0^t\bar{F}(t-x)\mathrm{d}[F(x)*B(x)]$$
$$+P\{V_1<\hat{\tau}_2;\hat{\tau}_1+b_1+\hat{\tau}_2\leqslant t;N(t)=0\}$$
$$+P\{V_1\geqslant\hat{\tau}_2;\hat{\tau}_1+b_1+\hat{\tau}_2\leqslant t;N(t)=0\}$$
$$=\bar{F}(t)+\int_0^t\bar{F}(t-x)\mathrm{d}[F(x)*B(x)]$$
$$+\int_0^t\int_0^{t-x}p_{10}(t-x-y)V(y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}[F(x)*B(x)]$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}p_{m0}(t-x-y)\frac{(\lambda y)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot$$
$$\mathrm{d}V(y)\mathrm{d}[F(x)*B(x)] \tag{5}$$

其中 $\hat{\tau}_i$ 与 b_i 分别表示系统的第 i 个"系统闲期"长度，与第 i 个"服务员忙期"长度，$i\geqslant1$；而 V_1 表示服务员的第一个假期长度.

类似地，对 $i\geqslant1$，有

$$p_{i0}(t)=\int_0^t\bar{F}(t-x)\mathrm{d}B^{(i)}(x)$$
$$+\int_0^t\int_0^{t-x}p_{10}(t-x-y)V(y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}p_{m0}(t-x-y)\frac{(\lambda y)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}V(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x) \tag{6}$$

这样，对式(5)与式(6)取 L 变换，再类似本章§2 中定理 1，即可完成该定理的证明.

■

定理 2 对 $\mathscr{R}(s)>0,i\geqslant1,j\geqslant1$，有

$$p_{0j}^*(s)=\frac{f(s)\{q_j^*(s)+\delta_j^*(s)\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))} \tag{7}$$

$$p_{ij}^*(s)$$
$$=\sum_{k=1}^{i}q_{j-i+k}^*(s)b^{k-1}(s)$$

$$+\frac{b^{i-1}(s)\{\{v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))\}q_j^*(s)+\delta_j^*(s)\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))} \tag{8}$$

其中$q_j^*(s)$由第四章§2中定理1确定,$\delta_j^*(s)$由本章§2中定理2给出,$j\geqslant 1$.

证明

$$\begin{aligned}
&p_{0j}(t)\\
&=\int_0^t Q_j(t-x)\mathrm{d}F(x)+P\{V_1<\hat{\tau}_2;\hat{\tau}_1+b_1+\hat{\tau}_2\leqslant t;N(t)=j\}\\
&\quad+P\{V_1\geqslant\hat{\tau}_2;\hat{\tau}_1+b_1+\hat{\tau}_2\leqslant t<\hat{\tau}_1+b_1+V_1;N(t)=j\}\\
&\quad+P\{V_1\geqslant\hat{\tau}_2;\hat{\tau}_1+b_1+V_1\leqslant t;N(t)=j\}\\
&=\int_0^t Q_j(t-x)\mathrm{d}F(x)\\
&\quad+\int_0^t\int_0^{t-x}p_{1j}(t-x-y)V(y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}[F(x)*B(x)]\\
&\quad+\int_0^t\overline{V}(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\frac{[\lambda(t-x)]^j}{j!}\mathrm{d}[F(x)*B(x)]\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}p_{mj}(t-x-y)\frac{(\lambda y)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\\
&\qquad\qquad\mathrm{d}V(y)\mathrm{d}[F(x)*B(x)]
\end{aligned} \tag{9}$$

类似地,对$i\geqslant 1$,有

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t)&=\sum_{k=1}^{i}Q_{j-i+k}(t)*B^{(k-1)}(t)\\
&\quad+\int_0^t\int_0^{t-x}p_{1j}(t-x-y)V(y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x)\\
&\quad+\int_0^t\overline{V}(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\frac{[\lambda(t-x)]^j}{j!}\mathrm{d}B^{(i)}(x)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}p_{mj}(t-x-y)\frac{(\lambda y)^m}{m!}\cdot\\
&\qquad\qquad\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}V(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

这样,对式(9)和式(10)取L变换,类似本章§2中定理2,即可完成

该定理的证明.

定理 3 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j\geqslant 0$，则对任意初始状态，有

1) 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}\geqslant 1$ 时，$p_j=0, j\geqslant 0$，从而 $\{p_j, j\geqslant 0\}$ 不构成概率分布；

2) 当 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$ 时，$\{p_j, j\geqslant 0\}$ 存在，且构成概率分布，进一步有如下递推式：

$$p_0=\frac{(1-\rho)}{\lambda E[V]+v(\lambda)} \tag{11}$$

$$p_j=\frac{\lambda(1-\rho)}{\lambda E[V]+v(\lambda)}\left\{\theta_j+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\overline{V}(t)\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\left[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{d}V(t)\right]\right\},\quad j\geqslant 1 \tag{12}$$

其中 θ_j 由本章§2中定理3确定，$j\geqslant 1$，而且当 $j\leqslant 0$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{j}=0$.

证明 仿照第四章§2中定理3的证明.

推论 1 令 $P_v(z)$ 和 $P(z)$ 分别表示空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统与标准的 $M/G/1/\infty$ 排队系统队长平稳分布的概率母函数，则

$$P_v(z)=P(z)\cdot\frac{1-v(\lambda(1-z))+(1-z)v(\lambda)}{(1-z)\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}},$$
$$|z|<1 \tag{13}$$

证明： 根据母函数的定义，直接计算即可.

上述推论表明，在空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统中，稳态队长也可分解成独立的两部分之和：一部分是对应标准的 $M/G/1/\infty$ 排队系统的稳态队长；另一部分是由休假引起的附加顾客

数. 因此式(13)就是空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统稳态队长的随机分解结果.

推论 2 对空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，当 $\rho<1$ 时，有

$$p_j^+ = p_j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{14}$$

推论 3 对空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，当 $\rho<1$ 时，平均队长

$$\overline{N} = \rho + \frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 E[V^2]}{2\{\lambda E[V] + v(\lambda)\}} \tag{15}$$

4. 等待时间与逗留时间

假定顾客是按先到先服务的规则被服务的. 由于顾客服务完毕离开时留在系统中的顾客数等于在该顾客的逗留时间内到达的顾客数，所以在空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统中，稳态队长与逗留时间仍然成立如下著名关系式：

$$P_v(z) = w(\lambda(1-z)), \quad |z|<1 \tag{16}$$

于是有如下结论成立.

定理 4 对空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在 $\rho<1$ 下，有

$$1)\ w_q(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda[1-g(s)]} \cdot \frac{sv(\lambda)+\lambda[1-v(s)]}{s\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}}, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{17}$$

$$2)\ w(s) = \frac{s(1-\rho)g(s)}{s-\lambda[1-g(s)]} \cdot \frac{sv(\lambda)+\lambda[1-v(s)]}{s\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}}, \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \tag{18}$$

而且平均等待时间与平均逗留时间为

$$\bar{W}_q = \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda E[V^2]}{2\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}} \tag{19}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda E[V^2]}{2\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}} \tag{20}$$

推论 4 对于空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，Little 公式成立.

§4 空竭服务多重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个 $GI/M/1/\infty$ 排队系统. 在该排队系统中，顾客的到达间隔时间序列$\{\tau_i, i\geqslant 1\}$独立、服从一般分布 $F(t)$，记平均到达间隔时间为 $0<\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)$；顾客所需的服从时间序列$\{\chi_i, i\geqslant 1\}$独立、服从参数 $\mu(>0)$的负指数分布 $G(t)=1-\mathrm{e}^{-\mu t}, t\geqslant 0$. 每当系统变空时，服务员就去进行休假. 若休假结束时系统中仍没有顾客，服务员就接着开始另一次新的休假；若休假结束时系统中至少有一个顾客，服务员就立即为顾客服务，直到系统再次变空时又去休假. 假定休假时间序列$\{V_i, i\geqslant 1\}$独立、服从参数 $\theta(>0)$的负指数分布 $V(t)=1-\mathrm{e}^{-\theta t}, t\geqslant 0$，并且到达、服务与休假是彼此独立的. 进一步设 $t=0$ 时刻系统中无顾客时，服务员也去进行休假（但平稳结果与此假设无关）.

2. 嵌入马尔柯夫链

假定 T_n 表示从 $t=0$ 开始第 n 个顾客的到达时刻，N_n^- 表示第 n 个顾客到达时看到系统中已有的顾客，即看到的顾客数，令

$$J_n = \begin{cases} 0, & \text{若第 } n \text{ 个到达时刻发生在假期中} \\ 1, & \text{若第 } n \text{ 个到达时刻发生在服务员忙期中} \end{cases}$$

则容易证明$\{N_n^-, J_n, n\geqslant 1\}$是队长过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$的嵌入马尔柯夫链，其状态空间为$\mathbf{E}=\{(j,i); j=0,1,2,\cdots; i=0,1\}$.

定理 1 嵌入马尔柯夫链$\{N_n^-, J_n; n\geqslant 1\}$是状态空间 E 上不可约、非周期的齐次马尔柯夫链.

证明 令状态的一步转移概率为

$$p_{(k,h),(j,i)} = P\{N_{n+1}^- = j, J_{n+1} = i \mid_{N_n^- = k, J_n = h}\}$$

则

1)当 $j=1,2,\cdots,i+1, i\geqslant 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&p_{(i,1),(j,1)} \\
&= P\{\text{在到达间隔}\ \tau\ \text{内服务完}\ i+1-j\ \text{个顾客}\} \\
&= \begin{cases} P\{\hat{\chi} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i-j} \leqslant \tau < \hat{\chi} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1-j}\}, & i \geqslant 1 \\ P\{\chi_1 + \cdots + \chi_{i+1-j} \leqslant \tau < \chi_1 + \cdots + \chi_{i+2-j}\}, & i = 0 \end{cases} \\
&= \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} dF(t) = b_{i+1-j} \qquad (1)
\end{aligned}$$

其中 $b_k = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dF(t), k \geqslant 0$；$\hat{\chi}$ 表示正在被服务的顾客的剩余服务时间，$\hat{\chi}$ 有参数 $\mu(>0)$的负指数分布.

2)当 $j\geqslant i+2, i\geqslant 0$ 时，显然有

$$p_{(i,1),(j,1)} = 0 \qquad (2)$$

3)当 $i\geqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned}
p_{(i,1),(0,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + \sum_{j=1}^{k-1} V_j \leqslant \tau < \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + \sum_{j=1}^{k} V_j\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty P\left\{\chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + \sum_{j=1}^{k-1} V_j \leqslant t < \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + \sum_{j=1}^{k} V_j\right\} dF(t)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^t [V^{(k-1)}(t-x) - V^{(k)}(t-x)] \mathrm{d}P\{\chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} \leqslant x\} \mathrm{d}F(t)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_0^t \frac{\mu(\mu x)^i}{i!} \mathrm{e}^{-\mu x} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}F(t)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{i} b_k \tag{3}$$

4)当 $i \geqslant 0$ 时,有

$$p_{(i,0),(i+1,0)} = P\{\tau < \hat{V}\} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\theta t} \mathrm{d}F(t) = f(\theta) \tag{4}$$

其中 $\hat{V}$ 表示剩余假期,有参数 $\theta(>0)$ 的负指数分布.

5)当 $j=1,2,\cdots,i+1, i \geqslant 0$ 时,有

$$p_{(i,0),(j,1)} = P\{\hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1-j} \leqslant \tau < \hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1-j} + \chi_{i+2-j}\}$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{[\mu(t-x)]^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \mathrm{e}^{-\mu(t-x)} \cdot \theta \mathrm{e}^{-\theta x} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}F(t)$$

$$= c_{i+1-j} \tag{5}$$

其中 $c_k = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{[\mu(t-x)]^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu(t-x)} \cdot \theta \mathrm{e}^{-\theta x} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}F(t), k \geqslant 1$.

6)当 $j=i+2,\cdots, i \geqslant 0$ 时,显然有

$$p_{(i,0),(j,1)} = 0 \tag{6}$$

7)当 $i \geqslant 0$ 时,有

$$p_{(i,0),(0,0)} = \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{ \hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + \sum_{j=1}^{k-1} V_j \leqslant \tau < \hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + \sum_{j=1}^{k} V_j \right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{t}[V^{(k-1)}(t-x)-V^{(k)}(t-x)]\mathrm{d}P\{\hat{V}+\chi_1+\cdots+\chi_{i+1}\leqslant x\}\mathrm{d}F(t)$$

$$=\int_0^{\infty}P\{\hat{V}+\chi_1+\cdots+\chi_{i+1}\leqslant t\}\mathrm{d}F(t)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{t}\left\{1-\sum_{k=0}^{i}\frac{[\mu(t-x)]^k}{k!}\right\}\mathrm{d}V(x)\mathrm{d}F(t)$$

$$=1-f(\theta)-\sum_{k=0}^{i}c_k \tag{7}$$

因此$\{N_n^-,J_n,n\geqslant 1\}$是状态空间 **E** 上的齐次马尔柯夫链.

如果我们按字典序：$(0,0),\{(j,1),(j,0)\},j=1,2\cdots$写出一步转移概率矩阵 **P** 为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}B_{00} & A_{01} & O & O & \cdots \\ B_{10} & A_1 & A_0 & O & \cdots \\ B_{21} & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ B_{30} & A_3 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix} \tag{8}$$

其中，$B_{00}=1-f(\theta)-c_0$，$A_{01}=[c_0,f(\theta)]$，$A_0=\begin{bmatrix}b_0 & 0\\ c_0 & f(\theta)\end{bmatrix}$，$A_k=\begin{bmatrix}b_k,0\\ c_k,0\end{bmatrix}$，$B_{k0}=\begin{bmatrix}1-\sum_{i=1}^{k}b_i\\ 1-f(\theta)-\sum_{i=0}^{k}c_i\end{bmatrix}$，$k\geqslant 1$，**O** 是相应的 2 维零行向量或 2×2 阶零矩阵.

根据 **P** 的结构易知$\{N_n^-,J_n,n\geqslant 1\}$为不可约、非周期的. 至此定理 1 证毕.



下面我们将应用 Neuts 发展起来的矩阵几何技术来讨论其平稳结果. 为此，先介绍如下引理：

引理 1 令 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$，则当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$ 时，矩阵方程 $\mathbf{R}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}^k A_k$ 有最小非负解 $\mathbf{R}$，且

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\delta & 0\\ \gamma(\delta-f(\theta)) & f(\theta)\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中 $f(\theta)=\int_0^{\infty}e^{-\theta t}\mathrm{d}F(t)$，$\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z=\int_0^{\infty}e^{-\mu(1-z)t}\mathrm{d}F(t)=f(\mu(1-z))$ 在(0,1)内惟一的实根，$\gamma=\frac{\theta}{\theta-\mu[1-f(\theta)]}$.

证明 由于 $A_k(k\geqslant 0)$ 均为 2×2 阶的下三角形矩阵，如果矩阵方程有解 $\mathbf{R}$，则 $\mathbf{R}$ 必为 2×2 阶的下三角形矩阵. 不妨设

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & 0\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{R}^k=\begin{bmatrix}r_{11}^k & 0\\ r_{21}\sum_{j=0}^{k-1}r_{11}^j r_{22}^{k-1-j} & r_{22}^k\end{bmatrix},\quad k\geqslant 1 \tag{10}$$

然后将式(10)代入矩阵方程，若能求出 $\mathbf{R}$，则解的存在性就证明了.

事实上，将式(10)代入矩阵方程，有

$$\begin{cases}r_{11}=f(\mu(1-r_{11}))\\ r_{22}=f(\theta)\\ r_{21}=r_{21}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sum_{j=0}^{k-1}r_{11}^j r_{22}^{k-1-j}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k[f(\theta)]^k\end{cases} \tag{11}$$

显然，当 $\rho<1$ 时，由第五章 §1 中引理 2 知，式(11)中的第一个方程在(0,1)有惟一解 $r_{11}=\delta$，$0<\delta<1$. 然后将 $r_{11}=\delta$，$r_{22}=f(\theta)$ 代入式(11)中的第三个方程，并注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k[f(\theta)]^k=\frac{\theta}{\theta-\mu[1-f(\theta)]}\{f(\mu(1-f(\theta)))-f(\theta)\} \tag{12}$$

$$1-\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sum_{j=0}^{k-1}\delta^j[f(\theta)]^{k-1-j}=1-\frac{\{\delta-f(\mu(1-f(\theta)))\}}{\delta-f(\theta)}$$

$$=\frac{1}{\delta-f(\theta)}\{f(\mu(1-f(\theta)))-f(\theta)\} \tag{13}$$

即得 r_{21}. 从而得解式(9).

由于 $r_{11}=\delta>0, r_{22}=f(\theta)>0$,所以要证解非负,只需说明当 $\rho<1$ 时,有

$$\gamma[\delta-f(\theta)]=\frac{\theta[\delta-f(\theta)]}{\theta-\mu[1-f(\theta)]}>0 \tag{14}$$

下面分两种情况讨论式(14).

由于 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z=f(\mu(1-z))$ 在(0,1)内的惟一解,且 $f(\mu(1-z))$ 是关于 z 在[0,1]内单增的凸函数(见图9.1),因此

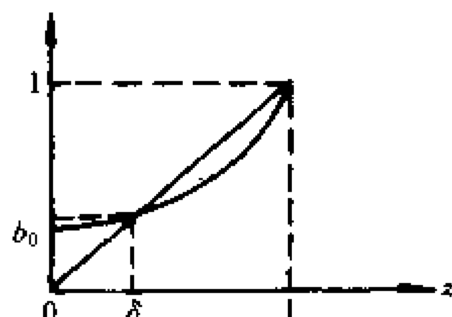


图 9.1

当 $0<z<\delta$ 时,有 $z<f(\mu(1-z))$;
当 $\delta<z<1$ 时,有 $z>f(\mu(1-z))$.

1)当 $\theta<\mu(1-\delta)$ 时,则显然有

$$f(\theta)>f(\mu(1-\delta))=\delta \tag{15}$$

取 $z=f(\theta)$,则 $\delta<z=f(\theta)<1$,于是

$$z=f(\theta)>f(\mu(1-f(\theta)))$$

即

$$\theta<\mu[1-f(\theta)] \tag{16}$$

结合式(15)与式(16),此时,式(14)成立.

2)当 $\theta>\mu(1-\delta)$ 时,则显然有

$$f(\theta)<f(\mu(1-\delta))=\delta \tag{17}$$

仍然取 $z=f(\theta)$，则 $0<z=f(\theta)<\delta$，于是

$$z=f(\theta)<f(\mu(1-f(\theta)))$$

即

$$\theta>\mu[1-f(\theta)] \tag{18}$$

结合式(17)与式(18)，此时式(14)仍然成立.

由于 $\delta(0<\delta<1)$ 是方程 $z=f(\mu(1-z))$ 在(0,1)内的最小正根，因此矩阵解 $\mathbf{R}$ 是矩阵方程 $\mathbf{R}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}^k A_k$ 的最小非负解.

■

注： 在参考文献[30]与参考文献[127]中，作者指出上述引理1在 $\theta=\mu(1-\delta)$ 时也成立. 其理由是"使用洛必塔法则"可得，但未见过程. 事实上，该论断是没有推证到的. 因为当 $\theta=\mu(1-\delta)$ 时，使用洛必塔法则，得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\theta\to\mu(1-\delta)}\frac{\delta-f(\theta)}{\theta-\mu[1-f(\theta)]}\\
&=\lim_{\theta\to\mu(1-\delta)}\frac{-f'(\theta)}{1+\mu f'(\theta)}\\
&=\frac{\int_0^{\infty}te^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)}{\int_0^{\infty}[1-\mu te^{-\mu(1-\delta)t}]\mathrm{d}F(t)}
\end{aligned} \tag{19}$$

在式(19)中，分子显然是大于零的，因此，要说明式(19)大于零，只需说明其分母大于零. 但是，若令

$$h(t)=1-\mu te^{-\mu(1-\delta)t},\quad t\geqslant 0$$

则 $h(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，$h(0)=h(\infty)=1$，且

$$h'(t)=\frac{\mu[\mu(1-\delta)t-1]}{e^{\mu(1-\delta)t}}$$

令 $h'(t)=0$，得 $h(t)$ 在 $[0,\infty)$ 内的惟一驻点：

$$t_0=\frac{1}{\mu(1-\delta)}$$

于是 $h(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上的最大值、最小值分别为

$$\max_{0\leqslant t<\infty}h(t)=1,\ \min_{0\leqslant t<\infty}h(t)=1-\frac{1}{e(1-\delta)},\quad 0<\delta<1$$

而最小值是与δ有关的. 显然

$$H(\delta)=1-\frac{1}{e(1-\delta)}$$

在[0,1)内严格下降,而且

$$H(0)=1-\frac{1}{e}>0,\quad \lim_{\delta\to 1^-}H(\delta)=-\infty$$

所以,若令

$$H(\delta)=0$$

得$\delta^*=1-\frac{1}{e}$. 于是

当$0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{e}$时,最小值$\min\limits_{0\leqslant t<\infty}h(t)\geqslant 0$,此时式(19)分母大于0;

当$1-\frac{1}{e}<\delta<1$时,最小值$\min\limits_{0\leqslant t<\infty}h(t)<0$,这样$h(t)$在$(0,\infty)$内有两个零点,不妨设为$t_1,t_2(t_1<t_2)$,于是积分

$$\int_0^{\infty}[1-\mu t\mathrm{e}^{-\mu(1-\delta)t}]\mathrm{d}F(t)$$

$$=\int_0^{t_1}h(t)\mathrm{d}F(t)+\int_{t_1}^{t_2}h(t)\mathrm{d}F(t)+\int_{t_2}^{\infty}h(t)\mathrm{d}F(t)$$

上式第一与第三项非负,但第二项非正,因此此时不能断定其符号.

从上面分析中知,当$\theta=\mu(1-\delta)$时,若$0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{e}$,则引理1也是成立的.

引理2 令$\mathbf{A}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1-f(\theta) & f(\theta)\end{bmatrix}$,则矩阵方程$\mathbf{R}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}^kA_k$有解$\mathbf{R}^*$,且$\mathbf{R}^*$的所有特征值都在单位圆内的必要充分条件是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(A_k)_{jj}z^k\right]\Bigg|_{z=1}>1 \tag{20}$$

对满足$(\mathbf{A})_{jj}=1$和$(A_0)_{jj}>0$的所有j都成立. 其中$(\mathbf{A})_{jj}$表示矩阵$\mathbf{A}$第j行第j列的元素.

证明　必要性　若矩阵方程 $\mathbf{R}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}^kA_k$ 有解 $\mathbf{R}^*$，则 $\mathbf{R}^*$ 可表示为

$$\mathbf{R}^*=\begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

且方程组式(11)成立. 于是

$$r_{11}=f(\mu(1-r_{11})),\quad r_{22}=f(\theta)$$

显然 $\mathbf{R}^*$ 特征值为 $\lambda_1=r_{11},\lambda_2=r_{22}$. 由于 λ_1、λ_2 都在单位圆内，所以

$$0<r_{11}<1 \tag{21}$$

于是在单位圆内，方程 $r_{11}=f(\mu(1-r_{11}))$ 有解 $r_{11}=\delta,0<\delta<1$，且由于 $f(\mu(1-r_{11}))$ 在(0,1)内是单调增加的凸函数，于是解 $r_{11}=\delta$ 在(0,1)内惟一. 根据第五章§1引理2知，

$$\rho<1 \tag{22}$$

现在，使得 $(\mathbf{A})_{jj}=1$ 且 $(A_0)_{jj}>0$ 的只有 $j=1$，但

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(A_k)_{11}z^k\right]\Big|_{z=1}=\frac{1}{\rho}$$

结合式(22)即知式(20)成立.

充分性　若式(20)成立，则 $\rho<1$. 类似式(9)的推导，可知矩阵方程 $\mathbf{R}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}^kA_k$ 有解 $\mathbf{R}^*$，且 $\mathbf{R}^*$ 可表示为

$$\mathbf{R}^*=\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ \gamma(\delta-f(\theta)) & f(\theta) \end{bmatrix}$$

其中 $\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z=f(\mu(1-z))$ 在(0,1)内的惟一解；$\gamma=\dfrac{\theta}{\theta-\mu[1-f(\theta)]}$.

显然 $\mathbf{R}^*$ 的所有特征值都在单位圆内. 至此引理2证毕.



定理 2

1)当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$ 时,若 $\rho<1$,则嵌人马尔柯夫链 $\{(N_n^-,J_n);n\geqslant 1\}$ 为正常返;

2)当 $\theta=\mu(1-\delta)$,但 $0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{e}$ 时,若 $\rho<1$,则嵌人马尔柯夫链 $\{(N_n^-,J_n);n\geqslant 1\}$ 为正常返.

证明 根据参考文献[110]中定理 1.5.1,知嵌人马尔柯夫链 $\{(N_n^-,J_n);n\geqslant 1\}$ 的状态为正常返的必要充分条件是矩阵解 $\mathbf{R}$ 的特征值都在单位圆内,而且矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} B_{00} & A_{01} \\ \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{R}^{k-1}B_{k0} & \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{R}^{k-1}A_k \end{bmatrix} \tag{23}$$

有正的左不变向量,即存在向量 $\mathbf{e}=(e_1,e_2,e_3)>\mathbf{O}$,使得 $\mathbf{eB}=\mathbf{e}$.

当 $\rho<1$ 时,显然式(20)成立.由引理 2 知矩阵解 $\mathbf{R}$ 的特征值都在单位圆内.下面只需验证矩阵 $\mathbf{B}$ 有正的左不变向量 $\mathbf{e}$.事实上,

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1-f(\theta)-v_0 & v_0 & f(\theta) \\ \frac{b_0}{\delta} & 1-\frac{b_0}{\delta} & 0 \\ 1-\frac{b_0\gamma[\delta-f(\theta)]}{\delta f(\theta)}+\frac{v_0}{f(\theta)} & \frac{b_0\gamma[\delta-f(\theta)]}{\delta f(\theta)}-\frac{v_0}{f(\theta)} & 0 \end{bmatrix}$$

取 $\mathbf{e}=(x_0,\gamma[\delta-f(\theta)]x_0,f(\theta)x_0)$,则易验证 $\mathbf{eB}=\mathbf{e}$.根据引理 1 及其注解,此时 $\gamma[\delta-f(\theta)]>0$,因此只要令 $x_0>0$,就有 $\mathbf{e}$ 为正的向量,即 $\mathbf{B}$ 存在正的左不变向量,从而嵌人马尔柯夫链 $\{(N_n^-,J_n);n\geqslant 1\}$ 为正常返.

定理 3 若嵌人马尔柯夫链 $\{(N_n^-,J_n);n\geqslant 1\}$ 为正常返,则 $\rho<1$.

证明 由参考文献[110]中定理 1.5.1 与上述引理 2 即证.

定理 4 令 $p_{(j,i)}=\lim\limits_{n\to\infty}P\{N_n^-=j,J_n=i\},j\geqslant 0;i=0,1$,则

1)当 $\theta\neq\mu(1-\delta),\rho<1$ 时,有

$$\begin{cases} p_{(j,0)} = \sigma(1-\delta)[f(\theta)]^j, & j \geqslant 0 \\ p_{(j,1)} = \dfrac{\theta(1-\delta)}{\theta-\mu(1-\delta)}[\delta^j - f^j(\theta)], & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{24}$$

2) 当 $\theta = \mu(1-\delta)$，但 $0 < \delta \leqslant 1 - \dfrac{1}{e}$，$\rho < 1$ 时，有

$$\begin{cases} p_{(j,0)} = \delta^j(1-\delta)\left[1 - \mu\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t)\right], & j \geqslant 0 \\ p_{(j,1)} = j\mu(1-\delta)^2\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t), & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\sigma = \dfrac{\theta - \mu[1-f(\theta)]}{\theta - \mu(1-\delta)}$，$\delta(0 < \delta < 1)$ 为方程 $z = \int_0^\infty e^{-\mu(1-z)t} dF(t)$ 在(0,1)内的惟一解.

证明 根据参考文献[110]中定理 1.5.1，在定理 4 的条件的成立下，$\{p_{(j,i)}; j \geqslant 0, i = 0, 1\}$ 存在，而且

$$(p_{(0,0)}, p_{(1,1)}, p_{(1,0)})$$

由矩阵 **B** 的正左不变向量和正则条件

$$p_{(0,0)} + (p_{(1,1)}, p_{(1,0)})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{26}$$

确定. 其中 **I** 为 2 阶单位阵，**R** 为式(9)给出. 而

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\delta} & 0 \\ \dfrac{\gamma[\delta - f(\theta)]}{(1-\delta)[1-f(\theta)]} & \dfrac{1}{1-f(\theta)} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$(p_{(0,0)}, p_{(1,1)}, p_{(1,0)}) = \mathbf{e} = (x_0, \gamma[\delta - f(\theta)]x_0, f(\theta)x_0) \tag{28}$$

因此，当 $\theta \neq \mu(1-\delta)$ 时，由式(26)、式(27)和式(28)可得

$$\begin{cases} p_{(0,0)} = \sigma(1-\delta) \\ p_{(1,1)} = \dfrac{\theta(1-\delta)[\delta - f(\theta)]}{\theta - \mu(1-\delta)} \\ p_{(1,0)} = \sigma(1-\delta)f(\theta) \end{cases} \tag{29}$$

而当 $\theta = \mu(1-\delta)$，但 $0 < \delta \leqslant 1 - \dfrac{1}{e}$ 时，使用洛必塔法则，有

$$
\begin{cases}
p_{(0,0)} = (1-\delta)\left[1-\mu\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)\right] \\
p_{(1,1)} = \mu(1-\delta)^2\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t) \\
p_{(1,0)} = \delta(1-\delta)\left[1-\mu\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)\right]
\end{cases}
\tag{30}
$$

对 $j\geqslant 2$ 时，由参考文献[110]中方程(1.5.4)给出

$$
(p_{(j,1)}, p_{(j,0)}) = (p_{(1,1)}, p_{(1,0)})\mathbf{R}^{j-1} \tag{31}
$$

而

$$
\mathbf{R}^{j-1} = \begin{bmatrix} \delta^{j-1} & 0 \\ \gamma[\delta^{j-1} - f^{j-1}(\theta)] & [f(\theta)]^{j-1} \end{bmatrix}, \quad j \geqslant 2 \tag{32}
$$

于是式(32)代入式(31)，结合式(29)与式(30)，可完成定理4的证明.

推论1 令 $p_j^- = \lim\limits_{n\to\infty} P\{N_n^- = j\}, j \geqslant 0$，若 $\rho < 1$，则

1)当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$ 时，$\{p_j^-, j\geqslant 0\}$ 存在，而且

$$
p_j^- = \sigma(1-\delta)[\gamma\delta^j + (1-\gamma)f^j(\theta)], \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{33}
$$

2)当 $\theta=\mu(1-\delta)$ 且 $0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{e}$ 时，$\{p_j^-, j\geqslant 0\}$ 存在，而且

$$
p_j^- = (1-\delta)\left\{\delta^j\left[1-\mu\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)\right] + j\mu(1-\delta)^{j-1}\int_0^\infty t e^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)\right\}, \quad j \geqslant 0 \tag{34}
$$

推论2 对空竭服务多重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，在系统达到统计平衡下，顾客到达时看到队长 N^- 可分解成独立的两部分之和，即

$$
N^- = N_1^- + N_2^- \tag{35}
$$

而且

1)当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$ 时，有

$$P\{N_1^- = j\} = \begin{cases} \dfrac{1-\delta}{(1-\delta)+\gamma[\delta - f(\theta)]}, & j = 0 \\ \dfrac{\gamma[\delta - f(\theta)]}{(1-\delta)+\gamma[\delta - f(\theta)]}(1-\delta)\delta^{j-1}, & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{36}$$

$$P\{N_2^- = j\} = [1 - f(\theta)]f^j(\theta), \quad j \geqslant 0 \tag{37}$$

2）当 $\theta=\mu(1-\delta)$ 且 $0<\delta\leqslant 1-\dfrac{1}{e}$ 时，有

$$P\{N_1^- = j\} = \begin{cases} 1 - \mu\displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t), & j = 0 \\ (1-\delta)\delta^{j-1}\mu\displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t), & j \geqslant 1 \end{cases} \tag{38}$$

$$P\{N_2^- = j\} = (1-\delta)\delta^j, \quad j \geqslant 0 \tag{39}$$

其中 $\gamma = \dfrac{\theta}{\theta - \mu[1 - f(\theta)]}$，$f(\theta) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{d}F(t)$，$\delta(0<\delta<1)$ 为方程 $z = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu(1-z)t}\mathrm{d}F(t)$ 在(0,1)内的惟一解.

证明 当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$ 时，有

$$\begin{aligned} p_0^- &= \sigma(1-\delta) = \frac{1-f(\theta)}{(1-\delta)+\gamma[\delta - f(\theta)]}(1-\delta) \\ &= P\{N_1^- = 0\}\cdot P\{N_2^- = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_j^- &= \sigma(1-\delta)\{f^j(\theta) + \gamma[\delta^j - f^j(\theta)]\} \\ &= \sigma(1-\delta)\left\{f^j(\theta) + \gamma[\delta - f(\theta)]\sum_{k=0}^{j-1} f^k(\theta)\delta^{j-1-k}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{j} P\{N_2^- = k\}\cdot P\{N_1^- = j-k\}, \quad j \geqslant 1 \end{aligned}$$

而当 $\theta=\mu(1-\delta)$ 且 $0<\delta\leqslant 1-\dfrac{1}{e}$ 时，上式中应用洛必塔法则即可得证. ■

推论 3 在系统达到统计平衡下，顾客到达时看到队长的平均数为($\rho<1$)

1)当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$时，有

$$E[N^-]=\frac{\gamma[\delta-f(\theta)]}{(1-\delta)^2+\gamma[\delta-f(\theta)](1-\delta)}+\frac{f(\theta)}{1-f(\theta)} \tag{40}$$

2)当 $\theta=\mu(1-\delta)$且 $0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{\mathrm{e}}$时，有

$$E[N^-]=\frac{\mu\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)}{1-\delta}+\frac{\delta}{1-\delta} \tag{41}$$

3. **等待时间与逗留时间**

假定顾客是按先到先服务的规则被服务的. 对空竭服务多重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，

定理 5 对空竭服务多重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，在系统达到统计平衡下，有

$$1)w_q(s)=\frac{(1-\delta)(s+\mu)}{s+\mu(1-\delta)}\cdot\frac{\theta}{s+\theta},\quad \mathscr{R}(s)>0 \tag{42}$$

$$2)w(s)=\frac{\mu(1-\delta)}{s+\mu(1-\delta)}\cdot\frac{\theta}{s+\theta},\quad \mathscr{R}(s)>0 \tag{43}$$

而且平均等待时间与平均逗留时间分别为

$$\overline{W}_q=\frac{\delta}{\mu(1-\delta)}+\frac{1}{\theta} \tag{44}$$

$$\overline{W}=\frac{1}{\mu(1-\delta)}+\frac{1}{\theta} \tag{45}$$

证明：因为

$$W_q(t)=p_{(0,0)}P\{\hat{V}\leqslant t\}+\sum_{j=1}^{\infty}p_{(j,0)}P\{\hat{V}+\chi_1+\cdots+\chi_j\leqslant t\}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} p_{(j,1)} P\{\chi_1+\cdots+\chi_{j-1}+\hat{\chi}\leqslant t\} \tag{46}$$

其中 $\hat{V}$ 表示剩余休假时间，有 $P\{\hat{V}\leqslant t\}=1-\mathrm{e}^{-\theta t},t\geqslant 0$；$\hat{\chi}$ 表示剩余服务时间，有分布 $P\{\hat{\chi}\leqslant t\}=1-\mathrm{e}^{-\mu t},t\geqslant 0$.

对式(46)取 LS 变换，并结合定理 4，经过整理即得式(42).

由于 $W=W_q+\chi$，且 W_q 与 χ 独立，于是式(43)成立.

根据期望平均值与 LS 变换之间的关系易得式(44)与式(45).

推论 4 对空竭服务多重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统，顾客的稳态等待时间可分解成独立的两部分之和：一部分是对应无休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统的稳态等待时间，另一部分是服务员的剩余休假时间.

§5 空竭服务单重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个 $GI/M/1/\infty$ 排队系统. 在该排队系统中，顾客的到达间隔时间序列 $\{\tau_i,i\geqslant 1\}$ 独立、同一般分布 $F(t)$，记平均到达间隔时间为 $0<\dfrac{1}{\lambda}=\int_0^{\infty} t\mathrm{d}F(t)$；顾客所需的服务时间序列 $\{\chi_i,i\geqslant 1\}$ 独立、服从相同参数 $\mu(>0)$ 的负指数分布 $G(t)=1-\mathrm{e}^{-\mu t},t\geqslant 0$，一旦系统变空时，服务员便开始一次休假，若休假结束时系统中仍没有顾客，则服务员进入通常的闲期，直到下一个顾客的到达，并立即为其服务；若休假结束时系统中已有顾客等待，则服务员立即对顾客进行服务，直到系统再次变空时又去进行一次休假. 假定休假时间序列 $\{V_i,i\geqslant 1\}$ 独立、服从参数 $\theta(>0)$ 的负指数分布 $V(t)=1-\mathrm{e}^{-\theta t},t\geqslant 0$，并且到达、服务与休假是彼此独立的. 进一步设 $t=0$ 时刻系统中无顾客时服务员也去进行休假(但平稳结果与此假设无关).

2. **嵌入马尔柯夫链**

在单重休假规则下，服务员有忙期、假期和闲期三种状态，而在多重休假规则下，服务员只有忙期和假期两种状态，因此单重休假规则下的情形更为复杂.

假定 T_n 表示从 $t=0$ 开始第 n 个顾客的到达时刻，N_n^- 表示第 n 个顾客到达时看到系统中已有的顾客数，$n\geqslant 1$，若令

$$J_n=\begin{cases}0, & \text{若第 } n \text{ 个到达发生于假期中}\\ 1, & \text{若第 } n \text{ 个到达发生于闲期或服务员忙期中}\end{cases}$$

则容易证明$\{N_n^-,J_n;n\geqslant 1\}$为队长过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$的嵌入马尔柯夫链，有状态空间

$$\mathbf{E}=\{(j,i);j=0,1,2,\cdots;i=0,1\}$$

状态(0,1)表示到达发生于闲期，而状态$(j,1)$，$j\geqslant 1$，表示到达发生于服务员忙期.

定理1 嵌入马尔柯夫链$\{N_n^-,J_n;n\geqslant 1\}$是状态空间 $\mathbf{E}$ 上不可约、非周期的齐次马尔柯夫链.

证明 令状态的一步转移概率为

$$p_{(k,h),(j,i)}=P\{N_{n+1}^-=j,J_{n+1}=i\,|_{N_n^-=k,J_n=h}\}$$

则

1）当 $j=1,2,\cdots i+1,i\geqslant 0$ 时，

$$p_{(i,1),(j,1)}=\begin{cases}P\{\chi>\tau\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}F(t)=b_0, \quad i=0\\ P\{\hat{\chi}+\chi_1+\cdots+\chi_{i-j}\leqslant\tau<\hat{\chi}+\chi_1+\cdots+\chi_{i+1-j}\}\end{cases}$$

$$=\int_0^\infty \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!}\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}F(t)=b_{i+1-j} \tag{1}$$

其中 $\hat{\chi}$ 为顾客的剩余服务时间，有参数 $\mu(>0)$的负指数分布，$b_k=\int_0^\infty \frac{(\mu t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}F(t),k\geqslant 0$.

2）当 $i=0,1,\cdots$ 时，

$$p_{(0,1),(0,1)}=P\{\chi+V<\tau\}=\int_0^\infty\int_0^t[1-e^{-\mu(t-x)}]\theta e^{-\theta x}dxdF(t)$$
$$=1-f(\theta)-c_0 \tag{2}$$

$$p_{(i,1),(0,1)}=P\{\hat{\chi}+\chi_1+\cdots+\chi_i+V<\tau\}$$
$$=\int_0^\infty\int_0^t\left\{1-\sum_{k=0}^{i}\frac{[\mu(t-x)]^k}{k!}e^{-\mu(t-x)}\right\}\theta e^{-\theta x}dxdF(t)$$
$$=1-f(\theta)-\sum_{k=0}^{i}c_k,\quad i\geqslant 1 \tag{3}$$

其中

$$f(\theta)=\int_0^\infty e^{-\theta t}dF(t),c_k=\int_0^\infty\int_0^t\frac{[\mu(t-x)]^k}{k!}e^{-\mu(t-x)}\theta e^{-\theta x}dxdF(t),$$
$$k\geqslant 0$$

3）当 $i=0,1,2,\cdots$ 时，

$$p_{(0,1),(0,0)}=P\{\chi\leqslant\tau<\chi+V\}=\int_0^\infty[V(t)*G(t)-G(t)]dF(t)$$
$$=f(\theta)+c_0-b_0 \tag{4}$$

$$p_{(i,1),(0,0)}=P\{\hat{\chi}+\chi_1+\cdots+\chi_i\leqslant\tau<\hat{\chi}+\chi_1+\cdots+\chi_i+V\}$$
$$=\int_0^\infty[V(t)*G^{(i+1)}(t)-G^{(i+1)}(t)]dF(t)$$
$$=f(\theta)+\sum_{k=0}^{i}c_k-\sum_{k=0}^{i}b_k,\quad i\geqslant 1 \tag{5}$$

4）当 $i\geqslant 0$ 时，

$$p_{(i,0),(i+1,0)}=P\{\tau<\hat{V}\}=f(\theta) \tag{6}$$

5）当 $j=1,2,\cdots,i+1,i\geqslant 0$ 时，

$$p_{(i,0),(j,1)}=P\{\hat{V}+\chi_1+\cdots+\chi_{i+1-j}\leqslant\tau<\hat{V}+\chi_1+$$

$$\cdots + \chi_{i+1-j} + \chi_{i+2-j}\}$$

$$= c_{i+1-j} \tag{7}$$

6）当 $i \geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned} p_{(i,0),(0,1)} &= P\{\hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + V < \tau\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^t \Big[1 - \sum_{k=0}^{i} \frac{[\mu(t-x)]^k}{k!} e^{-\mu(t-x)}\Big] dV^{(2)}(x) dF(t) \\ &= 1 - f(\theta) - \sum_{k=0}^{i} c_k - h_i \end{aligned} \tag{8}$$

其中，$h_k = \int_0^\infty \int_0^t \frac{\mu[\mu(t-x)]^k}{k!} e^{-\mu(t-x)} \cdot \theta x e^{-\theta x} dx dF(t), k \geqslant 0$.

7）当 $i \geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned} p_{(i,0),(0,0)} &= P\{\hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} \leqslant \tau < \hat{V} + \chi_1 + \cdots + \chi_{i+1} + V\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^t [1 - V(t-x)] d[V(x) * G^{(i+2)}(x)] dF(t) \\ &= h_i \end{aligned} \tag{9}$$

因此 $\{(N_n^-, J_n); n \geqslant 1\}$ 是状态空间 $\mathbf{E}$ 上的齐次马尔柯夫链.

若将状态按顺序 $\{(j,1),(j,0)\}, j \geqslant 0$，进行排列，其一步转移矩阵可表成分块形式：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & O & O & \cdots \\ B_1 & A_1 & A_0 & O & \cdots \\ B_2 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ c_0 & f(\theta) \end{bmatrix}, \quad A_k = \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ c_k & 0 \end{bmatrix}, \quad k \geqslant 1;$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 - f(\theta) - \sum_{j=0}^{k} c_j & f(\theta) + \sum_{j=0}^{k} c_j - \sum_{j=0}^{k} b_j \\ 1 - f(\theta) - \sum_{j=0}^{k} c_j - h_k & h_k \end{bmatrix}, \quad k \geqslant 0$$

根据 **P** 的结构易知$\{(N_n^-, J_n); n \geqslant 1\}$为不可约、非周期的，至此定理 1 证毕.

类似本章 § 4，下面引理成立.

引理 1 令 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$，则当 $\theta \neq \mu(1-\delta)$ 时矩阵方程 $\mathbf{R} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{R}^k A_k$ 有最小非负解

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ \gamma[\delta - f(\theta)] & f(\theta) \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中 $f(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} dF(t)$，$\delta(0 < \delta < 1)$ 为方程 $z = \int_0^{\infty} e^{-\mu(1-z)t} dF(t) = f(\mu(1-z))$ 在$(0,1)$内惟一实根，$\gamma = \frac{\theta}{\theta - \mu[1 - f(\theta)]}$.

引理 2 **R** 的特征值都在单位圆内的必要充分条件是 $\rho < 1$.

定理 2

1）当 $\theta \neq \mu(1-\delta)$时，若 $\rho < 1$，则嵌入马尔柯夫链$\{(N_n^-, J_n); n \geqslant 1\}$为正常返；

2）当 $\theta = \mu(1-\delta)$，但 $0 < \delta \leqslant 1 - \frac{1}{e}$ 时，若 $\rho < 1$，则嵌入马尔柯夫链$\{(N_n^-, J_n); n \geqslant 1\}$为正常返.

证明 根据参考文献[110]中定理 1.5.1，知嵌入马尔柯夫链$\{(N_n^-, J_n); n \geqslant 1\}$的状态为正常返的必要充分条件是矩阵解 **R** 的特征值都在单位圆内，而且矩阵

$$\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{R}^k B_k = \begin{bmatrix} \sigma & 1-\sigma \\ 1-\Delta & \Delta \end{bmatrix} \tag{12}$$

有正的左不变向量. 其中

$$\sigma = \frac{\theta - \mu[1 - f(\theta)]}{\theta - \mu(1-\delta)}, \quad \Delta = \frac{\theta}{\sigma} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}$$

而且当 $\rho<1$ 时，有 $0<\sigma<1, 0<\Delta\leqslant 1$（见参考文献[30]）.

当 $\rho<1$ 时，由引理 2 知矩阵解 $\mathbf{R}$ 的特征值都在单位圆内. 下面只需证明矩阵 $\mathbf{B}$ 有正的左不变向量. 事实上，取向量

$$\mathbf{e} = x_0(1 - b_{22}, 1 - b_{11})$$

其中 $x_0(>0)$ 为任意常数. 可以验证

$$\mathbf{eB} = \mathbf{e}$$

因此只要令 $x_0>0$，就有 $\mathbf{e}$ 为正的向量，即 $\mathbf{B}$ 存在正的左不变向量. 至此定理 2 证毕.

■

定理 3 若嵌入的马尔柯夫链 $\{(N_n^-, J_n); n\geqslant 1\}$ 为正常返，则 $\rho<1$.

证明 由参考文献[110]中定理 1.5.1 与上述引理 2 即证.

■

定理 4 令 $p_{(j,i)} = \lim\limits_{n\to\infty} P\{N_n^- = j, J_n = i\}, j\geqslant 0; i = 0,1$，则当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$，$\rho<1$ 时，有

$$\begin{cases} p_{(j,0)} = \widetilde{K}(1-\sigma)[f(\theta)]^j \\ p_{(j,1)} = \widetilde{K}\{(1-\Delta)\delta^j + (1-\sigma)\gamma[\delta^j - f^j(\theta)]\} \end{cases} \tag{13}$$

其中，

$$\widetilde{K} = \frac{(1-\delta)[1-f(\theta)]}{(1-\Delta)[1-f(\theta)] + (1-\sigma)\gamma[\delta - f(\theta)] + (1-\sigma)(1-\delta)},$$

$$\gamma = \frac{\theta}{\theta - \mu[1-f(\theta)]}.$$

证明 根据参考文献[110]中定理 1.5.1，在定理的条件下，$\{p_{(j,i)}; j\geqslant 0, i=0,1\}$ 存在，而且

$$(p_{(j,1)},p_{(j,0)}) = (p_{(0,1)},p_{(0,0)})\mathbf{R}^j,\quad j=0,1,2,\cdots \tag{14}$$

其中$(p_{(0,1)},p_{(0,0)})=\widetilde{K}(1-\Delta,1-\sigma)$是矩阵(12)的正左不变向量，且有正则条件

$$(p_{(0,1)},p_{(0,0)})(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1 \tag{15}$$

而

$$(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-\delta} & 0\\ \dfrac{\gamma[\delta-f(\theta)]}{(1-\delta)[1-f(\theta)]} & \dfrac{1}{1-f(\theta)}\end{bmatrix} \tag{16}$$

于是结合式(15)，可得

$$\widetilde{K}=\frac{(1-\delta)[1-f(\theta)]}{(1-\Delta)[1-f(\theta)]+(1-\sigma)\gamma[\delta-f(\theta)]+(1-\sigma)(1-\delta)}$$

再结合式(14)可得式(13).

■

推论 1 令$p_j^-=\lim\limits_{n\to\infty}P\{N_n^-=j\},j=0,1,2,\cdots$则当$\theta\neq\mu(1-\delta),\rho<1$时，有

$$\begin{aligned}p_j^-=\widetilde{K}\{(1-\Delta)\delta^j+(1-\sigma)\gamma[\delta^j-f^j(\theta)]\\+(1-\sigma)f^j(\theta)\},\quad j\geqslant 0\end{aligned} \tag{17}$$

推论 2 在系统达到统计平衡($\rho<1$)下，当$\theta\neq\mu(1-\delta)$时，顾客到达看到的平均队长

$$\begin{aligned}E[N^-]=\frac{\delta}{1-\delta}+\frac{f(\theta)}{1-f(\theta)}\\+\frac{\widetilde{K}}{(1-\delta)[1-f(\theta)]}\{(1-\sigma)\gamma[\delta-f(\theta)]\\-\delta(1-\sigma)-(1-\Delta)f(\theta)\}\end{aligned} \tag{18}$$

推论 3 在系统达到统计平衡($\rho<1$)下，当$\theta\neq\mu(1-\delta)$时，顾客到达时看到的队长N^-可分解成独立的三部分之和：

$$N^-=N_1^-+N_2^-+N_3^- \tag{19}$$

其中 N_1^- 分布为

$$P\{N_1^- = j\} = (1-\delta)\delta^j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{20}$$

即是无休假 $GI/M/1/\infty$ 中相应的稳态分布；而 N_2^- 服从参数 $f(\theta)$ 的几何分布，即

$$P\{N_2^- = j\} = [1 - f(\theta)][f(\theta)]^j, \quad j = 0,1,2,\cdots \tag{21}$$

N_3^- 是取值 0 与 1 的 0—1 变量.

证明 对式(17)取母函数，得

$$\begin{aligned}
P_c^{-1}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j p_j^- \\
&= \widetilde{K}\left\{\frac{1-\Delta}{1-\delta z} + (1-\sigma)\gamma\left[\frac{1}{1-\delta z} - \frac{1}{1-f(\theta)z}\right] + \frac{1-\sigma}{1-f(\theta)z}\right\} \\
&= \frac{(1-\delta)}{1-\delta z} \cdot \frac{1-f(\theta)}{1-f(\theta)z} \cdot K_0\{(1-\Delta)[1-f(\theta)z] \\
&\quad + (1-\sigma)\gamma[\delta - f(\theta)z] + (1-\sigma)(1-\delta z)\}
\end{aligned}$$

其中 $K_0 = \{(1-\delta)[1-f(\theta)]\}^{-1}\widetilde{K}$. 证毕.

需要说明的是，对于 $\theta=\mu(1-\delta)$，$\rho<1$，但 $0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{e}$ 时，以上结论仍然成立，但此时结合使用洛必塔法则，得到

$$\lim_{\theta\to\mu(1-\delta)} f(\theta) = \delta, \quad \lim_{\theta\to\mu(1-\delta)} (1-\sigma) = \mu\int_0^{\infty} t e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t)$$

$$\lim_{\theta\to\mu(1-\delta)} (1-\Delta) = 1 - \frac{\mu^2(1-\delta)\int_0^{\infty} t^2 e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t)}{2\left[1-\mu\int_0^{\infty} t e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t)\right]}$$

$$\lim_{\theta\to\mu(1-\delta)} \gamma[\delta - f(\theta)] = \frac{\mu(1-\delta)\int_0^{\infty} t e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t)}{1-\mu\int_0^{\infty} t e^{-\mu(1-\delta)t} dF(t)}$$

而

$$\lim_{\theta\to\mu(1-\delta)}\widetilde{K}=\frac{2(1-\delta)\left[1-\mu\int_0^\infty te^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)\right]}{2-\mu^2(1-\delta)\int_0^\infty t^2e^{-\mu(1-\delta)t}\mathrm{d}F(t)}$$

另外,若令 $\theta\to\infty$,即休假时间有

$$P\{V=0\}=1$$

则 $\sigma\to1,\gamma\to1,\Delta\to0,f(\theta)\to0,\widetilde{K}\to1-\delta$,于是

$$p_j^-=(1-\delta)\delta^j,\quad j=0,1,2,\cdots$$

$$E[N^-]=\frac{\delta}{1-\delta}$$

这正是无休假 $GI/M/1/\infty$ 排队系统的经典结果.

3. **等待时间与逗留时间**

假定顾客是按先到先服务的规则被服务的.对空竭服务单重休假 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,顾客的稳态等待时间有如下的分解结果.

定理 5 在系统达到统计平衡($\rho<1$)下,当 $\theta\neq\mu(1-\delta)$ 时,对 $\mathscr{R}(s)>0$,有

$$1)\ w_q(s)=\frac{(1-\delta)(s+\mu)}{s+\mu(1-\delta)}\frac{\widetilde{K}}{1-\delta}\Big\{(1-\Delta)+\frac{1-\sigma}{s+\mu[1-f(\theta)]}\Big[\mu\gamma[\delta-f(\theta)]+\frac{\theta[s+\mu(1-\delta)]}{s+\theta}\Big]\Big\}\tag{22}$$

$$2)\ w(s)=w_q(s)\cdot\frac{\mu}{s+\mu}\tag{23}$$

而平均等待时间与平均逗留时间分别为

$$\overline{W}_q = \frac{\delta}{\mu(1-\delta)} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{\widetilde{K}}{\theta(1-\delta)} \tag{24}$$

$$\overline{W} = \overline{W}_q + \frac{1}{\mu} \tag{25}$$

证明 完全类似本章§4中定理5的证明.

同样,对于 $\theta=\mu(1-\delta)$,$\rho<1$,但 $0<\delta\leqslant 1-\frac{1}{e}$ 时,以上结论仍然成立,而且当休假时间以概率1有 $V=0$ 时,等待时间和逗留时间的结果正是无休假 $GI/M/1/\infty$ 排队系统中的经典结果.

最后,作为本章的结束,我们指出,对于空竭服务多(单)重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统,当 $\theta=\mu(1-\delta)$ 但 $1-\frac{1}{e}<\delta<1$ 时,由于没有解决矩阵方程 $\mathbf{R}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}^k A_k$ 的解

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ \gamma(\delta - f(\theta)) & f(\theta) \end{bmatrix}$$

的非负性质(见本章§4中的式(19)),因此矩阵 $\mathbf{B}$(在本章§4中,$\mathbf{B}$ 的表达式由式(23)给出,而在本章§5中,$\mathbf{B}$ 的表达式由式(12)给出)是否存在正的左不变向量问题尚待进一步确定.

如果上述问题得到解决,则当 $\theta=\mu(1-\delta)$ 且 $1-\frac{1}{e}<\delta<1$ 时,在本章§4与§5中有关结论均成立.

第十章　可修排队系统

前面我们研究的排队系统(包括经典的和休假的排队系统),都是假定服务台是不会发生故障的,但在实际中却经常碰到服务台发生故障而不能为顾客服务的情形. 此时需要修理工人对发生故障的服务台进行修理(或更换),修理完成后再继续为顾客服务,我们把这类服务台可能发生故障且可修复的排队系统称为**可修排队系统**. 显然可修排队系统是从服务台的性能角度提出来的,与休假排队有很大差别,而且人们对这类可修排队系统又提出了新的研究课题,即不仅要研究系统的排队问题,同时还要研究因故障而产生的可靠性问题,例如系统的可用度和故障频度等. 因此,对于可修排队系统,无论是从排队论的角度,还是从可靠性理论的角度都是非常值得研究的.

§1　$M/G/1/\infty$可修排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个$M/G/1/\infty$排队系统,其中顾客的到达间隔时间$\{\tau_n, n\geqslant 1\}$是独立、同参数$\lambda(>0)$的负指数分布$F(t)=1-e^{-\lambda t}, t\geqslant 0$,即到达是参数$\lambda$的 Poisson 流;顾客实际所需的服务时间序列$\{\chi_n, n\geqslant 1\}$是独立、同一般分布$G(t), t\geqslant 0$,记平均服务时间为$0<\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)<\infty$. 系统中有一个服务台,服务台的寿命为$X$,且服从参数为$\alpha(0\leqslant\alpha<\infty)$的负指数分布

$$X(t)=P\{X\leqslant t\}=1-e^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0$$

服务台失效后立即进行修理,修理时间Y的分布函数是任意分布

$$Y(t)=P\{Y\leqslant t\},\quad t\geqslant 0$$

且设平均修理时间为 $0 \leqslant \beta = \int_0^\infty t\mathrm{d}Y(t) < \infty$. 进一步设

1)在服务台的空闲期间(即系统闲期内),服务台既不发生失效也不会变坏(相当于在闲期内关闭服务设备,且设备处于冷备状态),即不影响服务台的使用寿命;

2)当服务台失效时,正在接受服务的顾客需要等待其修复,再继续接受服务,已服务过的时间仍然有效;

3)服务台修复后,完全恢复它的功能,其寿命仍为 X,且 $t=0$ 时刻服务台是新的;

4)顾客的到达、服务、服务台的运转,以及服务台失效后的修理是彼此独立的,且各为一个独立过程.

对上述 $M/G/1/\infty$ 可修排队系统,本节讨论了其在排队论和可靠性理论中感兴趣的各种指标.

2. 排队指标

令 $\tilde{\chi}_n$ 表示第 n 个顾客从开始接受服务的时刻起直到服务结束的时间. 其中包括了在该顾客的服务期内,服务台可能发生失效而进行修理的时间,我们称 $\tilde{\chi}_n$ 为第 n 个顾客的"**广义服务时间**".

对 $t \geqslant 0$,令

$$\tilde{G}_n^{[k]}(t) = P\{\tilde{\chi}_n \leqslant t; \text{且在 } \tilde{\chi}_n \text{ 内服务台恰发生 } k \text{ 次失效}\},$$
$$k \geqslant 0, n \geqslant 1$$

则(见图 10.1)

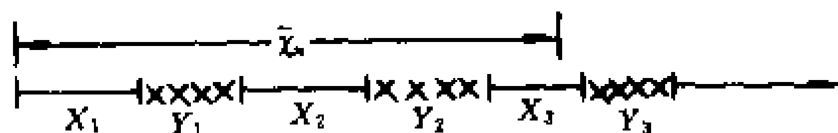


图 10.1

$$\tilde{G}_n^{[k]}(t) = P\left\{\chi_n + \sum_{j=1}^{k} Y_j \leqslant t; \sum_{j=1}^{k} X_j \leqslant \chi_n < \sum_{j=1}^{k+1} X_j\right\}$$

$$=\int_0^t Y^{(k)}(t-x)e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}dG(x),\quad k\geqslant 0,n\geqslant 1 \tag{1}$$

其中,当 $k\leqslant 0$ 时, $\sum_{j=1}^{k}=0$. 于是

$$\widetilde{G}(t)\overset{\Delta}{=}\widetilde{G}_n(t)=P\{\widetilde{\chi}_n\leqslant t\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t Y^{(k)}(t-x)e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}dG(x) \tag{2}$$

与 n 无关,其 LS 变换为

$$\widetilde{g}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\widetilde{G}(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[y(s)]^k\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^k}{k!}dG(t)$$

$$=g(s+\alpha-\alpha y(s)),\quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0 \tag{3}$$

且有平均"广义服务时间"为

$$E[\widetilde{\chi}_n]=(1+\alpha\beta)/\mu \tag{4}$$

其中 $y(s)=\int_0^{\infty}=e^{-st}dY(t)$.

由于负指数分布的"无记忆"性质,可以推得 $\{\widetilde{\chi}_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立,同分布 $\widetilde{G}(t)$,因此我们容易得如下引理:

引理 1 如果我们把 $\widetilde{\chi}_n$ 直接理解为第 n 个顾客的"服务时间",则所研究的系统等价于通常意义下的标准 $M/G/1/\infty$ 排队系统,其中输入过程是参数为 λ 的 Poisson 流,顾客的服务时间序列 $\{\widetilde{\chi}_n,n\geqslant 1\}$ 独立、同分布 $\widetilde{G}(t)$.

因此,我们可以仿照第四章的讨论,来求得这个可修排队系统感兴趣的各种排队指标,例如队长、等待时间和忙期等,为了下面讨论的方便,我们仅列举以下结果.

令 $\widetilde{b}$ 表示该可修排队系统从一个顾客开始的忙期长度,且

$$\widetilde{B}(t)=P\{\widetilde{b}\leqslant t\},t\geqslant 0;\widetilde{b}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\widetilde{B}(t),\quad \mathscr{R}(s)>0$$

推论 1 $\tilde{b}(s)$是方程$z=\tilde{g}(s+\lambda-\lambda z)$在$|z|<1$内的惟一解，并且

$$\widetilde{B}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{k-1}}{k!}d\widetilde{G}^{(k)}(x) \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{B}(t)=\lim_{s\to 0^+}\tilde{b}(s)=\begin{cases}1, & \tilde{\rho}\leqslant 1\\ \omega<1, & \tilde{\rho}>1\end{cases} \tag{6}$$

$$E[\tilde{b}]=\begin{cases}\tilde{\rho}/\lambda(1-\tilde{\rho}), & \tilde{\rho}<1\\ \infty, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{7}$$

其中$\tilde{\rho}=\lambda(1+\alpha\beta)/\mu$，$\omega$是$\omega=\tilde{g}(\lambda-\lambda\omega)$在$(0,1)$内的惟一解.

推论 2 令N_b表示在忙期$\tilde{b}$中服务完的顾客数，则

$$E[N_b]=\begin{cases}1/(1-\tilde{\rho}), & \tilde{\rho}<1\\ \infty, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{8}$$

3. **可靠性指标**

1)服务台的首次失效时间分布

对$t\geqslant 0$，令

$$\Psi_i(t)=P\{\text{服务台的首次失效时间}\leqslant t|_{N(0)=i}\}$$

$$\varphi_i(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\Psi_i(t),\quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0, i\geqslant 0$$

其中$N(0)$表示$t=0$时刻系统中的顾客数.

定理 1 对$i\geqslant 0$，有

$$\varphi_i(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}-\frac{s\alpha[b(s+\alpha)]^i}{(s+\alpha)[s+\lambda-\lambda b(s+\alpha)]} \tag{9}$$

而平均首次失效时间为

$$\int_0^{\infty}t\,d\Psi_i(t)=\frac{1}{\alpha}+\frac{b^i(\alpha)}{\lambda-\lambda b(\alpha)} \tag{10}$$

其中 $b(s)$ 是方程 $z=g(s+\lambda-\lambda z)$ 在 $|z|<1$ 内的惟一根，由前面第四章 § 4 中定理 1 完全确定.

证明 令 b 表示标准的 $M/G/1/\infty$ 排队系统从一个顾客开始的忙期长度，对 $t\geqslant 0,\mathscr{R}(s)\geqslant 0$，令

$$B(t)=P\{b\leqslant t\},b(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dB(t)$$

由第四章 § 4 中定理 1 知，$b(s)$ 是方程 $z=g(s+\lambda(1-z))$ 在 $|z|<1$ 内的惟一根，且由其完全确定. 进一步令 $b^{\langle i\rangle}$ 表示标准的 $M/G/1/\infty$ 排队系统从 i 个顾客开始的忙期长度，由于到达是 Poisson 流，因此

$$P\{b^{\langle i\rangle}\leqslant t\}=B^{(i)}(t),\quad i\geqslant 1,\quad t\geqslant 0$$

在服务台首次失效之前，系统是忙期和闲期交替的交替更新过程，且忙期与闲期是相互独立的，于是(见图 10.2)

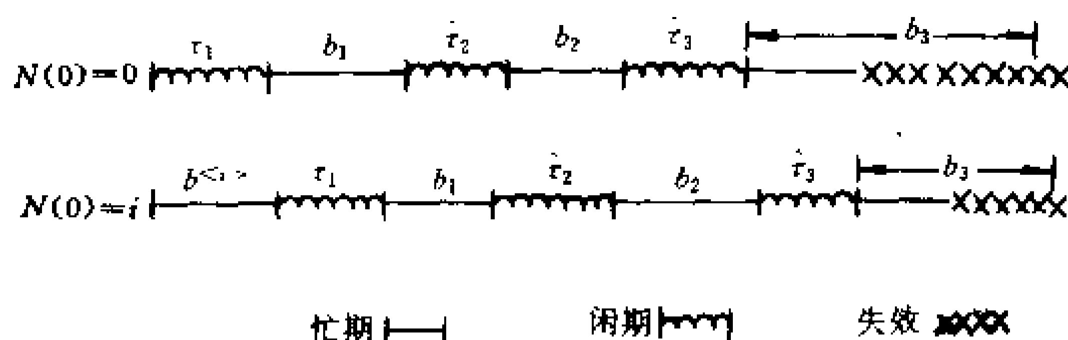


图 10.2

$$\Psi_0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{k=1}^{n}\hat{\tau}_k+X\leqslant t,\sum_{k=1}^{n-1}b_k\leqslant X<\sum_{k=1}^{n}b_k\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t F^{(n)}(t-x)[B^{(n-1)}(x)-B^{(n)}(x)]dX(x)$$

$$\Psi_i(t)=P\{X\leqslant t,X<b^{\langle i\rangle}\}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{X+\sum_{k=1}^{n}\hat{\tau}_k\leqslant t,b^{\langle i\rangle}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\leqslant X<b^{\langle i\rangle}+\sum_{k=1}^{n}b_k\right\}$$

$$=\int_0^t[1-B^{(i)}(x)]dX(x)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t F^{(n)}(t-x)[B^{(n+i-1)}(x)-B^{(n+i)}(x)]\mathrm{d}X(x),\quad i\geqslant 1$$

对以上各式取 LS 变换，经整理即得式(9)，由

$$\int_0^{\infty} t\mathrm{d}\Psi_i(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\varphi_i(s)]|_{s=0}$$

即得式(10).

2)时刻 t 服务台失效的概率

对 $t\geqslant 0$，令

$$A_i(t)=P\{\text{时刻}\ t\ \text{处于忙期}\ |_{N(0)=i}\},$$

$$a_i^*(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}A_i(t)\mathrm{d}t,\quad i\geqslant 0,\quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0$$

引理 2 对 $i\geqslant 0$，有

$$a_i^*(s)=\frac{1}{s}-\frac{\tilde{b}(s)}{s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s)}\tag{11}$$

而且平稳结果

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lim_{s\to 0^+}sa_i^*(s)=\begin{cases}\lambda(1+\alpha\beta)/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ 1, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases}\tag{12}$$

证明 仿照第四章§5中引理1的证明.

考虑一个经典的单部件可靠性系统，其工作寿命 X 有分布 $X(t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t},t\geqslant 0$，系统失效后立即修理，其修理时间 Y 有一般分布 $Y(t)$，平均修理时间为 β，系统修复如新，立即转为工作状态，进一步设 $t=0$ 时刻系统是新的，而且 X 与 Y 相互独立.

对 $t\geqslant 0$，令

$$\tilde{\Phi}(t)=P\{\text{时刻}\ t\ \text{系统失效}\},\tilde{\varphi}^*(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\tilde{\Phi}(t)\mathrm{d}t$$

引理 3[20]　对 $\mathscr{R}(s) \geqslant 0$，有

$$\tilde{\varphi}^*(s) = \frac{\alpha[1 - y(s)]}{s[s + \alpha - \alpha y(s)]} \tag{13}$$

而平稳结果

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{\Phi}(t) = \lim_{s \to 0^+} s\tilde{\varphi}^*(s) = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \tag{14}$$

其中 $y(s) = \int_0^\infty e^{-st} dY(t)$.

下面我们讨论服务台在时刻 t 失效的概率. 对 $t \geqslant 0$，令

$$\Phi_i(t) = P\{\text{时刻 } t \text{ 服务台失效} \mid_{N(0)=i}\},$$

$$\varphi_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi_i(t) dt, \quad i \geqslant 0$$

定理 2　对 $\mathscr{R}(s) \geqslant 0$，有

$$\varphi_i^*(s) = \tilde{\varphi}^*(s) \cdot [s a_i^*(s)], \quad i \geqslant 0 \tag{15}$$

而且平稳结果

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_i(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_i(x) dx = \lim_{s \to 0^+} s\varphi_i^*(s) \tag{16}$$

证明　1)根据模型的假设，服务台在系统的闲期内不失效，而且在每一个忙期开始的时刻服务台都正常，寿命仍为 X，所以时刻 t 服务台失效当且仅当时刻 t 落入系统的某个忙期中，且时刻 t 服务台失效. 当 $i = 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
\Phi_0(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\Big\{\sum_{j=1}^{k-1} (\hat{\tau}_j + \tilde{b}_j) + \hat{\tau}_k \leqslant t < \sum_{j=1}^{k} (\hat{\tau}_j + \tilde{b}_j)\text{；时刻 } t \\
&\qquad \text{服务台失效}\Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P\{0 \leqslant t - x < \tilde{b}_k\text{；在 } \tilde{b}_k \text{ 中时刻 } t - x \text{ 服务台失效}\} \cdot \\
&\qquad dF^{(k)} * \tilde{B}^{(k-1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \tilde{S}(t - x) dF^{(k)} * \tilde{B}^{(k-1)}(x)
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\bar{\tau}_j$、$\bar{b}_j$ 分别表示系统从 $N(0)=0$ 状态出发的第 j 个闲期长度和第 j 个忙期长度，$j\geqslant 1$；而 $\widetilde{S}(t)=P\{\bar{b}>t\geqslant 0$，且时刻 t 服务台失效$\}$ 表示在忙期 $\bar{b}$ 中服务台于时刻 t 失效的联合概率.

对 $i\geqslant 1$，由于到达是 Poisson 流，服务台寿命为负指数分布，所以

$$
\begin{aligned}
\Phi_i(t) &= P\{\bar{b}^{\langle i\rangle}>t\geqslant 0;\text{时刻 } t \text{ 服务台失效}\} \\
&\qquad + \int_0^t \Phi_1(t-x)\mathrm{d}\widetilde{B}^{(i)}(x) \\
&= \widetilde{S}_i(t) + \int_0^t \Phi_1(t-x)\mathrm{d}\widetilde{B}^{(i)}(x)
\end{aligned} \tag{18}
$$

其中 $\widetilde{S}_i(t)=P\{\bar{b}^{\langle i\rangle}>t\geqslant 0;\text{时刻 } t \text{ 服务台失效}\}$，$\bar{b}^{(i)}$ 为有 i 个顾客开始的忙期长度，$i\geqslant 1$.

2）对 $t\geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}(t) &= \widetilde{\Phi}(t) - \int_0^t \widetilde{\Phi}(t-x)\mathrm{d}\widetilde{B}(x) \\
\widetilde{S}_i(t) &= \widetilde{\Phi}(t) - \int_0^t \widetilde{\Phi}(t-x)\mathrm{d}\widetilde{B}^{(i)}(x), \quad i\geqslant 1
\end{aligned} \tag{19}
$$

其中 $\widetilde{\Phi}(t)$ 由引理 3 给出.

事实上，服务台在每个忙期的开始和结束的时刻都是正常的，而且在每个忙期内服务台是正常和失效的交替更新过程. 于是用 $\bar{b}$ 对 $\widetilde{\Phi}(t)$ 进行全概率分解，得（见图 10.3）

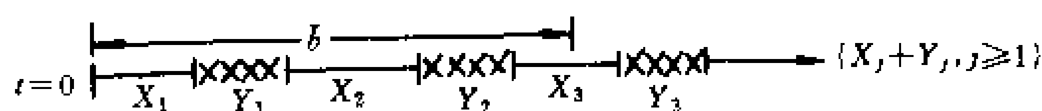


图 10.3

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(t) &= P\{\text{时刻 } t \text{ 部件失效}\} \\
&= P\{\bar{b}>t\geqslant 0;\text{时刻 } t \text{ 部件失效}\} \\
&\qquad + P\{\bar{b}\leqslant t;\text{时刻 } t \text{ 部件失效}\} \\
&= \widetilde{S}(t) + \int_0^t P\{\text{时刻 } t-x \text{ 部件失效}\mid_{\bar{b}=x}\}\mathrm{d}\widetilde{B}(x)
\end{aligned}
$$

因为忙期 $\tilde{b}$ 结束时刻服务台是正常的，所以 $\tilde{b}$ 的结束时刻必须落在某次寿命长度 X_k 中(见图 10.3)，而且 $\tilde{b}$ 在 X_k 的那部分时间完全由顾客的服务时间构成，根据服务、运行和修理相互独立的假定，有 $\tilde{b}$ 与 X_i、$Y_i(i \geqslant k)$ 相互独立. 又由于服务台的寿命有负指数分布，所以

$$P\{\text{时刻 } t-x \text{ 部件失效 } |_{\tilde{b}=x}\} = \tilde{\Phi}(t-x)$$

于是

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{S}(t) + \int_0^t \tilde{\Phi}(t-x)\mathrm{d}\tilde{B}(x)$$

同理，用 $\tilde{b}^{\langle i \rangle}$ 作条件，类似可得

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{S}_i(t) + \int_0^t \tilde{\Phi}(t-x)\mathrm{d}\tilde{B}^{(i)}(x), \quad i \geqslant 1$$

即式(19)成立.

3)将式(19)代入式(17)与式(18)，得

$$\Phi_0(t) = \tilde{\Phi}(t) * \sum_{k=1}^{\infty}[1-\tilde{B}(t)] * F^{(k)}(t) * \tilde{B}^{(k-1)}(t)$$

$$\Phi_i(t) = \tilde{\Phi}(t) * [1-\tilde{B}^{(i)}(t)] + \Phi_1(t) * \tilde{B}^{(i)}(t), \quad i \geqslant 1$$

对上式取 L 变换，并注意到引理 2 与引理 3 即得式(15).

4)因为 $\int_0^t \Phi_i(x)\mathrm{d}x$ 是 t 的单增函数，根据 Tauber 定理(见附录中的第五)，得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \Phi_i(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0^+} s\varphi_i^*(s)$$

又因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi_i(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{s\to 0^+}\int_0^t \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\Phi_i(x)$ 根据控制收敛定理，所以

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_i(t) = \lim_{s\to 0^+}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\Phi_i(x) = \lim_{s\to 0^+} s\varphi_i^*(s)$$

因此式(16)成立. 至此定理 2 证毕.



推论 3 对 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$,有

$$\varphi_i^*(s)=\frac{\alpha[1-y(s)]}{s[s+\alpha-\alpha y(s)]}\left\{1-\frac{s[\tilde{b}(s)]^i}{s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s)}\right\},\quad i\geqslant 0 \tag{20}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_i(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\alpha\beta}{\mu}, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha\beta/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{21}$$

3)服务台的失效次数

定理 3 令 $p_k=P\{$在广义服务时间 $\tilde{\chi}$ 内服务台恰失效 k 次$\}$,$k\geqslant 0$,则

$$p_k=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}\mathrm{d}G(x) \tag{22}$$

而平均失效次数

$$\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=\frac{\alpha}{\mu} \tag{23}$$

证明 根据式(1)易得.

定理 4 令 $\tilde{N}$ 表示在忙期长度 $\tilde{b}$ 内服务台的失效次数,则

$$E[\tilde{N}]=\begin{cases}\alpha/\mu(1-\tilde{\rho}), & \tilde{\rho}<1\\ \infty, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{24}$$

证明 设 $\tilde{v}$ 表示在忙期 $\tilde{b}$ 内服务完的顾客数,$\tilde{N}_i$ 表示在第 i 个广义服务时间 $\tilde{\chi}_i$ 内服务台的失效次数,则

$$\tilde{N}=\sum_{i=1}^{\tilde{v}}\tilde{N}_i$$

且易知$\{\tilde{N}_i,i\geqslant 1\}$是相互独立、同分布

$$P\{\tilde{N}_i=k\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}\mathrm{d}G(x),\quad k\geqslant 0,\quad i\geqslant 1$$

因为

$$\{\tilde{\nu}=m\}$$

$$=\{\tau_1-\tilde{\chi}_1\leqslant 0,\cdots,(\tau_1+\cdots+\tau_{m-1})-(\tilde{\chi}_1+\cdots+\tilde{\chi}_{m-1})\leqslant 0,$$

$$(\tau_1+\cdots+\tau_m)-(\tilde{\chi}_1+\cdots+\tilde{\chi}_m)>0\}$$

所以由$\{\tau_i\}$、$\{\tilde{\chi}_i\}$的独立性，有事件$\{\tilde{\nu}=m\}$与$\tilde{\chi}_{m+1},\tilde{\chi}_{m+2},\cdots$独立，于是事件$\{\tilde{\nu}=m\}$与$\tilde{N}_{m+1},\tilde{N}_{m+2},\cdots$相互独立，即随机变量$\tilde{\nu}$是序列$\{\tilde{N}_k,k\geqslant 1\}$的一个停时，根据 Wald's 方程(见参考文献[116])，得

$$E[\tilde{N}]=E[\tilde{\nu}]\cdot E[\tilde{N}_1]$$

于是再结合推论 2 与式(23)即得式(24).



对引理 3 所考虑的单部件可靠性系统，若令$\tilde{M}(t)$表示系统在$(0,t]$内失效的平均次数，$\tilde{m}(s)$为其 LS 变换，则有如下引理：

引理 4[20] 对$\mathscr{R}(s)\geqslant 0$，有

$$\tilde{m}(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha-\alpha y(s)} \tag{25}$$

而平稳结果

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{M}(t)}{t}=\lim_{s\to 0^+}s\tilde{m}(s)=\frac{\alpha}{1+\alpha\beta} \tag{26}$$

下面我们讨论服务台在$(0,t]$内失效的平均次数. 对$t\geqslant 0$，令

$$\tilde{M}_i(t)=E[\text{服务台在}(0,t]\text{内失效次数}\mid_{N(0)=i}],$$

$$\tilde{m}_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}\tilde{M}_i(t),\quad i\geqslant 0$$

定理 5 对$\mathscr{R}(s)\geqslant 0$，有

$$\tilde{m}_i(s)=\tilde{m}(s)[sa_i^*(s)],\quad i\geqslant 0 \tag{27}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{M}_i(t)}{t}=\lim_{s\to 0^+}s\tilde{m}_i(s),\quad i\geqslant 0 \tag{28}$$

证明 仿照定理 2 的证明.

推论 4 对 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$,有

$$\tilde{m}_i(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha-\alpha y(s)}\left\{1-\frac{s[\bar{b}(s)]^i}{s+\lambda-\lambda\bar{b}(s)}\right\},\quad i\geqslant 0 \tag{29}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_i(t)}{t}=\begin{cases}\lambda\alpha/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{30}$$

定理 6 令 $\widetilde{L}_i(t)=\widetilde{M}_i(t)-\left(\dfrac{\alpha t}{1+\alpha\beta}\right)*A_i(t),t\geqslant 0$,则对一切 $i\geqslant 0$,有

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{L}_i(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\mu}\left[\dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2(1+\alpha\beta)}-1\right], & \tilde{\rho}<1\\ \dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2(1+\alpha\beta)^2}-\dfrac{1}{1+\alpha\beta}, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{31}$$

其中,"*"号表示卷积,σ^2 表示分布 $X(t)*Y(t)=\int_0^t X(t-x)\mathrm{d}Y(x)$ 的二阶原点矩.

证明 由式(27)反演,得

$$\widetilde{M}_i(t)=\widetilde{M}(t)*A_i(t),\quad t\geqslant 0,\quad i\geqslant 0$$

于是

$$\widetilde{L}_i(t)=\left[\widetilde{M}(t)-\frac{\alpha t}{1+\alpha\beta}\right]*A_i(t)$$

由于 $\widetilde{L}_i(0)=0$,所以

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\widetilde{L}_i(t)&=\lim_{t\to\infty}\lim_{s\to 0^+}\int_0^t \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\widetilde{L}_i(x)\\&=\lim_{s\to 0^+}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\widetilde{L}_i(x)\\&=\lim_{s\to 0^+}\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\left[\widetilde{M}(x)-\frac{\alpha x}{1+\alpha\beta}\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\cdot \left\{\int_0^{\infty} e^{-sx} dA_t(x) + A_t(0)\right\}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\widetilde{M}(t) - \frac{\alpha t}{1+\alpha\beta}\right] \cdot \lim_{t\to\infty} A_t(t) \tag{32}$$

又(见参考文献[63])

$$\lim_{t\to\infty}\left[\widetilde{M}(t) - \frac{\alpha t}{1+\alpha\beta}\right] = \frac{\alpha^2\sigma^2}{2(1-\alpha\beta)^2} - \frac{1}{1+\alpha\beta} \tag{33}$$

于是结合引理 1 即证定理 6.



从式(26)和式(31),我们可以得到,当 t 充分大时,计算 $\widetilde{M}_t(t)$ 的近似公式为:

$$\widetilde{M}_t(t) \approx \begin{cases} \frac{\lambda\alpha}{\mu} t, & \tilde{\rho} < 1 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha\beta} t, & \tilde{\rho} \geqslant 1 \end{cases} \tag{34}$$

或进一步有

$$\widetilde{M}_i(t) \approx \begin{cases} \frac{\lambda\alpha}{\mu} t + \frac{\lambda}{\mu}\left[\frac{\alpha^2\sigma^2}{2(1+\alpha\beta)} - 1\right], & \tilde{\rho} < 1 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha\beta} t + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2(1+\alpha\beta^2)} - \frac{1}{1+\alpha\beta}, & \tilde{\rho} \geqslant 1 \end{cases} \tag{35}$$

4)服务台的失效时间

定理 7 设 χ^* 表示服务台的广义服务时间 $\tilde{\chi}$ 内总的失效时间,对 $x \geqslant 0$,令 $G^*(x) = P\{\chi^* \leqslant x\}$,则

1) $G^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} Y^{(k)}(x) \frac{(\alpha y)^k}{k!} dG(y)$ (36)

2) $E[\chi^*] = \alpha\beta/\mu$ (37)

证明 因为 $\tilde{\chi} = \chi + \chi^*$,且 χ 与 χ^* 相互独立,所以

$$P\{\chi^* \leqslant x, \tilde{\chi} \leqslant t\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\chi^* \leqslant t, \tilde{\chi} \leqslant t, \text{服务台在 } \tilde{\chi} \text{ 内失效 } k \text{ 次}\}$$

$$=P\{\chi \leqslant t, 0 \leqslant \chi < X_1\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{k} Y_j \leqslant x, \chi + \sum_{j=1}^{k} Y_j \leqslant t, \sum_{i=1}^{k} X_i \leqslant \chi < \sum_{i=1}^{k+1} X_i\right\}$$

$$=\int_0^t e^{-\alpha y} dG(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P\left\{\sum_{j=1}^{k} Y_j \leqslant x, \sum_{j=1}^{k} Y_j \leqslant t - y\right\}$$

$$\cdot \frac{(\alpha y)^k}{k!} e^{-\alpha y} dG(y)$$

$$=\int_0^t e^{-\alpha y} dG(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t-x} Y^{(k)}(x) \frac{(\alpha y)^k}{k!} e^{-\alpha y} dG(y)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t-x}^{t} Y^{(k)}(t-y) \frac{(\alpha y)^k}{k!} e^{-\alpha y} dG(y)$$

于是令 $t \to \infty$ 即得式(36). 由 $E[\chi^*] = E[\tilde{\chi}] - E[\chi]$ 即得式(37).

■

定理 8 设 b^* 表示在忙期 $\tilde{b}$ 内服务台的总失效时间，则平均失效时间为

$$E[b^*] = \begin{cases} \alpha\beta/\mu(1-\tilde{\rho}), & \tilde{\rho} < 1 \\ \infty, & \tilde{\rho} \geqslant 1 \end{cases} \tag{38}$$

证明 设 χ_i^* 表示在广义服务时间 $\tilde{\chi}_i$ 内服务台的失效时间，$\tilde{v}$ 表示在 $\tilde{b}$ 中服务完的顾客数，则

$$b^* = \sum_{i=1}^{\tilde{v}} \chi_i^*$$

于是再类似定理 4 的证明即得.

■

定理 9 令 $D(t)$表示服务台在$(0,t]$时间内总的失效时间，则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[D(t)|_{N(0)=i}]}{t} = \begin{cases} \lambda\alpha\beta/\mu, & \tilde{\rho} < 1 \\ \alpha\beta/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho} \geqslant 1 \end{cases} \tag{39}$$

证明 显然

$$E[D(t)|_{N(0)=i}] = \int_0^t \Phi_i(x) dx, \quad i \geqslant 0 \tag{40}$$

其中 $\Phi_i(t)$ 表示时刻 t 服务台失效的概率. 于是结合定理 2 与推论 3 即得式(39).

从式(39),我们可得当 t 充分大时,计算 $(0,t]$ 内服务台的平均失效时间的近似公式:

$$E[D(t)|_{N(0)=i}] \approx \begin{cases} \dfrac{\lambda\alpha\beta}{\mu}t, & \tilde{\rho}<1 \\ \dfrac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}t, & \tilde{\rho}\geqslant 1 \end{cases} \tag{41}$$

结合前面的式(35),进一步有:

$$E[D(t)|_{N(0)=i}] \approx \begin{cases} \dfrac{\lambda\alpha\beta}{\mu}t + \dfrac{\lambda\beta}{\mu}\left[\dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2(1+\alpha\beta)} - 1\right], & \tilde{\rho}<1 \\ \dfrac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}t + \dfrac{\alpha^2\sigma^2\beta}{2(1+\alpha\beta)^2} - \dfrac{\beta}{1+\alpha\beta}, & \tilde{\rho}\geqslant 1 \end{cases} \tag{42}$$

§2 $GI/G/1/\infty$ 可修排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个一般到达与一般服务的 $GI/G/1/\infty$ 排队系统,其中顾客的到达间隔时间序列 $\{\tau_n, n\geqslant 1\}$ 是独立、同一般分布 $F(t), t\geqslant 0$,且设到达的平均间隔时间为 $0<\dfrac{1}{\lambda}=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)<\infty$;顾客实际所需的服务时间序列 $\{\chi_n, n\geqslant 1\}$ 是独立、同一般分布 $G(t), t\geqslant 0$,且设平均服务时间为 $0<\dfrac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)<\infty$. 系统中有一个服务台,其寿命为 X,服从参数为 $\alpha(0\leqslant\alpha<\infty)$ 的负指数分布

$$X(t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad t\geqslant 0$$

服务台失效后立即进行修理,其修理时间 Y 有一般分布 $Y(t)$,且设

平均修理时间为 $0 \leqslant \beta = \int_0^\infty t\mathrm{d}Y(t) < \infty$. 其它有关假设条件与本章§1一样.

2. **排队指标**

令 $\tilde{\chi}_n$ 表示第 n 个顾客的"广义服务时间",则仿照本章§1中引理1,同样可证 $\{\tilde{\chi}_n, n \geqslant 1\}$ 独立、同分布

$$\begin{aligned}\tilde{G}(t) &= P\{\tilde{\chi}_n \leqslant t\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t Y^{(k)}(t-x)\mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^k}{k!} \mathrm{d}G(x) \end{aligned} \tag{1}$$

且平均"广义服务时间"为

$$E[\tilde{\chi}_n] = (1 + \alpha\beta)/\mu \tag{2}$$

于是,所研究的 $GI/G/1/\infty$ 可修排队系统与经典 $GI/G/1/\infty$ 排队系统是等价的,其中输入的间隔时间序列 $\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ 独立、同一般分布 $F(t)$,顾客的服务时间序列 $\{\tilde{\chi}_n, n \geqslant 1\}$ 独立、同分布 $\tilde{G}(t)$.

因此,我们可以仿照第六章的讨论,来研究该可修排队系统感兴趣的各种排队指标,如队长、等待时间、忙期等,为后面的讨论方便,我们仅例举如下有关结果.

推论 1[9] 对 $\mathscr{R}(s) > 0$,忙期 $\tilde{b}$ 的分布函数的 LS 变换 $\tilde{b}(s)$ 为

$$\tilde{b}(s) = 1 - \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k^*(s)}{k}\right\} \tag{3}$$

而且当 $\tilde{\rho} = \lambda(1 + \alpha\beta)/\mu < 1$ 时,有

$$E[\tilde{b}] = \frac{(1 + \alpha\beta)}{\mu} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e_k}{k}\right\} < \infty \tag{4}$$

其中

$$e_k^*(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}[1 - F^{(k)}(t)]\mathrm{d}\tilde{G}^{(k)}(t),$$

$$e_k = \int_0^\infty [1 - F^{(k)}(t)]\mathrm{d}\tilde{G}^{(k)}(t), \quad k \geqslant 1.$$

我们定义系统的"忙期循环"是指从一个忙期开始的时刻起,直到紧接着的下一个忙期开始为止的这段时间,即相邻两次忙期开始

的间隔时间. 显然一个忙期循环的长度等于当前的忙期长度与闲期长度之和.

推论 2[69] 令 $\widetilde{d}$ 表示一个忙期循环长度, $\widetilde{d}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dP\{\widetilde{d}\leqslant t\}$, 则对 $\mathscr{R}(s)>0$, 有

$$\widetilde{d}(s)=1-\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-st}\widetilde{G}^{(k)}(t^+)dF^{(k)}(t)\right\} \tag{5}$$

而且当 $\widetilde{\rho}<1$ 时, 有

$$E[\widetilde{d}]=\frac{1}{\lambda}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e_k}{k}\right\}<\infty \tag{6}$$

推论 3[9] 令 N_b 表示忙期 $\widetilde{b}$ 中服务完的顾客数, 则当 $\widetilde{\rho}<1$ 时, 有

$$E[N_b]=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e_k}{k}\right\}<\infty \tag{7}$$

3. **可靠性指标**

引理 1 令 $A_i(t)=P\{$时刻 t 处于忙期 $|_{N(0)=i}\}$, $a_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A_i(t)dt$, 则对 $\mathscr{R}(s)>0$, 有

$$a_i^*(s)=\frac{[f(s)]^{1-i}[1-\widetilde{b}(s)]}{s[1-\widetilde{d}(s)]},\quad i=0,1 \tag{8}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lambda(1+\alpha\beta)/\mu,\quad \widetilde{\rho}=\lambda(1+\alpha\beta)/\mu<1 \tag{9}$$

其中 $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$, $\widetilde{b}(s)$ 与 $\widetilde{d}(s)$ 分别由推论 1 与推论 2 确定.

证明 令 R 为"一个顾客到达并发现系统空闲"这一事件, 再令 R 相继发生的时刻为 $r_1,r_2,\cdots$ 则 $\{r_i,i\geqslant 1\}$ 构成一个(延迟)更新过程的更新时刻, 即

1) 当 $i=0$ 时, $r_1,r_2-r_1,r_3-r_2,\cdots$ 相互独立, 且有分布

$$P\{r_1 \leqslant t\} = F(t), \quad P\{r_{m+1} - r_m \leqslant t\} = P\{\tilde{d} \leqslant t\}, \quad m \geqslant 1$$

2）当 $i=1$ 时，$r_1, r_2-r_1, r_3-r_2, \cdots$ 相互独立，且有相同分布

$$P\{r_1 \leqslant t\} = P\{r_{m+1} - r_m \leqslant t\} = P\{\tilde{d} \leqslant t\}, \quad m \geqslant 1$$

于是由更新过程理论，仿照第四章 § 5 中引理 1 的证明即得.



这样，仿照本章 § 1 的讨论，下列结果易得.

定理 1 对 $GI/G/1/\infty$ 可修排队系统，当 $\mathscr{R}(s)>0$ 时，有

1) $$\varphi_i^*(s) = \frac{\alpha[1-y(s)]}{s[s+\alpha-\alpha y(s)]} \cdot \frac{[f(s)]^{1-i}[1-\tilde{b}(s)]}{[1-\tilde{d}(s)]}, \quad i=0,1 \tag{10}$$

而且当 $\tilde{\rho}<1$ 时，有平稳结果

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_i(t) = \frac{\lambda\alpha\beta}{\mu} \tag{11}$$

2) $$\tilde{m}_i(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha-\alpha y(s)} \cdot \frac{[f(s)]^{1-i}[1-\tilde{b}(s)]}{[1-\tilde{d}(s)]}, \quad i=0,1 \tag{12}$$

而且当 $\tilde{\rho}<1$ 时，有平稳结果

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}_i(t)}{t} = \frac{\lambda\alpha}{\mu} \tag{13}$$

定理 2 对 $GI/G/1/\infty$ 可修排队系统，当 $\tilde{\rho}<1$ 时，在忙期 $\tilde{b}$ 内服务台失效的平均次数为

$$E[\tilde{N}] = \frac{\alpha}{\mu}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e_k}{k}\right\} \tag{14}$$

其中 $e_k = \int_0^\infty [1-F^{(k)}(t)]\mathrm{d}\tilde{G}^{(k)}(t), k \geqslant 1$.

定理 3 对 $GI/G/1/\infty$ 可修排队系统，当 $\tilde{\rho}<1$ 时，在忙期 $\tilde{b}$ 内服务台的平均失效时间为

$$E[b^*] = \frac{\alpha\beta}{\mu}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e_k}{k}\right\} \tag{15}$$

§ 3 空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 可修排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在该系统中，顾客的到达间隔时间序列 $\{\tau_i, i\geqslant 1\}$ 独立、同负指数分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t}, \lambda>0, t\geqslant 0$；顾客实际所需的服务时间序列 $\{\chi_i, i\geqslant 1\}$ 独立、同一般分布 $G(t)$，且平均服务时间为 $0<\frac{1}{\mu}=\int_0^{\infty}\mathrm{d}G(t)<\infty$；服务员具有空竭服务的多重休假规则，即服务员按照第九章 § 2 的规则进行休假，其休假时间序列 $\{V_i, i\geqslant 1\}$ 独立、服从一般分布 $V(t)$；系统中有一个服务台，其寿命为 X，服从参数为 $\alpha(0\leqslant\alpha<\infty)$ 的负指数分布

$$X(t)=1-e^{-\alpha t}, \quad t\geqslant 0$$

服务台失效后立即进行修理，其修理时间 Y 是任意分布

$$Y(t)=P\{Y\leqslant t\}, \quad t\geqslant 0$$

且记平均修理时间为 $0\leqslant\beta=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}Y(t)<\infty$．进一步假设：

1）在服务台的空闲期间（即在服务员的假期中），服务台既不发生失效也不会变坏（相当于服务员在其休假期间关闭服务设备，且设备处于冷备状态），即服务台只在第九章 § 2 中定义的“服务员忙期”内发生失效；

2）当服务台失效时，正在接受服务的顾客需要等待其修复，再继续接受服务，已服务过的时间仍然有效；

3）服务台修复后完全恢复它的功能，其寿命仍为 X；

4)到达过程、服务过程、服务员的休假、服务台的运行以及服务台失效后的修理都各自是一个独立过程，且彼此相互独立；

5)在 $t=0$ 时刻，服务台是新，且此时服务员在系统是空的条件下也不去休假(但平稳结果与此条假设无关).

显然，该模型是我们在第九章§2中研究的模型与在第十章§1中研究的模型的组合，它有机地把休假排队模型与可修排队模型结合起来了.

2. **排队指标**

令 $\tilde{\chi}_n$ 表示第 n 个顾客从开始接受服务的时刻起直到服务结束的时间，其中包括了在该顾客的服务期内，服务台可能发生失效而进行修理的时间，我们称 $\tilde{\chi}_n$ 为第 n 个顾客的"**广义服务时间**". 对 $t\geqslant 0$，令

$$\tilde{G}_n(t)=P\{\tilde{\chi}_n\leqslant t\},\quad n\geqslant 1$$

则类似本章§1中式(2)的讨论有

$$\tilde{G}(t)\overset{\Delta}{=}\tilde{G}_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t Y^{(k)}(t-x)\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}\mathrm{d}G(x)\tag{1}$$

与 n 无关，其LS变换为

$$\begin{aligned}\tilde{g}(s)&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\tilde{G}(t)\\&=g(s+\alpha-\alpha y(s)),\quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0\end{aligned}\tag{2}$$

且平均"广义服务时间"为

$$E[\tilde{\chi}_n]=(1+\alpha\beta)/\mu\tag{3}$$

由于负指数分布的"无记忆"性质，可以推证 $\{\tilde{\chi}_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立、同分布 $\tilde{G}(t)$，因此我们容易得到如下引理.

引理1 如果我们把 $\tilde{\chi}_n$ 直接理解为第 n 个顾客的"服务时间"，则所研究的系统等价于具有空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，其中输入过程是参数 $\lambda(>0)$ 的Poisson流，顾客的服务时间序列 $\{\tilde{\chi}_n,n\geqslant 1\}$ 独立、同分布 $\tilde{G}(t)$，服务员的休假时间序列 $\{V_i,i\geqslant 1\}$ 独

立、同一般分布 $V(t)$.

因此，我们可以仿照第九章 §2 的讨论，来研究该系统感兴趣的各种排队指标，例如队长的瞬态分布和稳态分布，稳态队长与等待队长的随机分解等. 下面不加证明地给出一些排队结果.

设 $\tilde{b}$ 表示系统从一个顾客开始的"服务员忙期"长度(见第九章 §2 中的定义)，且令

$$\tilde{B}(t) = P\{\tilde{b} \leqslant t\}, t \geqslant 0; \quad \tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\tilde{B}(t)$$

定理 1 对 $\mathscr{R}(s) > 0$，$\tilde{b}(s)$ 是方程

$$z = \tilde{g}(s + \lambda(1 - z)) \tag{4}$$

在 $|z| < 1$ 内的惟一解，$\tilde{B}(t)$ 可表示为

$$\tilde{B}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!} d\tilde{G}^{(j)}(x) \tag{5}$$

而且

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{B}(t) = \begin{cases} 1, & \tilde{\rho} \leqslant 1 \\ \omega < 1, & \tilde{\rho} > 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$E[\tilde{b}] = \begin{cases} \tilde{\rho}/\lambda(1 - \tilde{\rho}), & \tilde{\rho} < 1 \\ \infty, & \tilde{\rho} \geqslant 1 \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\tilde{\rho} = \lambda(1 + \alpha\beta)/\mu$； $\omega(0 < \omega < 1)$ 是方程 $z = \tilde{g}(\lambda - \lambda z)$ 的根.

假定 $N(t)$ 表示时刻 t 系统的队长，且令

$$\tilde{p}_{ij}(t) = P\{N(t) = j|_{N(0)=i}\},$$

$$\tilde{p}_{ij}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \tilde{p}_{ij}(t) dt, \quad i, j \geqslant 0$$

定理 2 对 $\mathscr{R}(s) > 0$，有

$$\tilde{p}_{00}^*(s) = \frac{[1 - f(s)]}{s} \left\{ 1 + \frac{f(s)\tilde{b}(s)[1 - v(s + \lambda)]}{1 - v(s + \lambda - \lambda\tilde{b}(s))} \right\} \tag{8}$$

$$\widetilde{p}_{i0}^{*}(s)=\frac{\bar{b}^{i}(s)[1-f(s)][1-v(s+\lambda)]}{s[1-v(s+\lambda-\lambda\bar{b}(s))]},\quad i\geqslant 1 \tag{9}$$

其中 $f(s),\bar{b}(s),v(s)$ 分别为分布 $F(t),\bar{B}(t),V(t)$ 的 LS 变换表达式.

定理 3 对 $\mathscr{R}(s)>0$, $i,j\geqslant 1$,有

$$\widetilde{p}_{0j}^{*}(s)=\frac{f(s)}{1-v(s+\lambda-\lambda\bar{b}(s))}\{[1-v(s+\lambda)]\tilde{q}_{j}^{*}(s)+\tilde{\delta}_{j}^{*}(s)\} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{ij}^{*}(s)=&\sum_{k=1}^{i}\tilde{q}_{j-i+k}^{*}(s)\bar{b}^{k-1}(s)\\&+\frac{\bar{b}^{i-1}(s)}{1-v(s+\lambda-\lambda\bar{b}(s))}\\&\cdot\{[v(s+\lambda-\lambda\bar{b}(s))-v(s+\lambda)]\tilde{q}_{j}^{*}(s)+\tilde{\delta}_{j}^{*}(s)\}\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\tilde{q}_{j}^{*}(s)$ 类似于第四章§2 中定理 1 确定的 $q_{j}^{*}(s)$,有递推式:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{j}^{*}(s)=&\frac{\bar{b}(s)}{\tilde{g}(s+\lambda)}\int_{0}^{\infty}[1-\widetilde{G}(t)]\mathrm{e}^{-st}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{\tilde{g}(s+\lambda)}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\tilde{q}_{j-k}^{*}(s)}{\bar{b}^{k}(s)}\left\{\bar{b}(s)-\sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\cdot\right.\\&\left.\frac{[\lambda\bar{b}(s)t]^{i}}{i!}\mathrm{d}\widetilde{G}(t)\right\},\quad j\geqslant 1\end{aligned} \tag{12}$$

而

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{j}^{*}(s)=&\bar{b}(s)\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\overline{V}(t)\frac{(\lambda t)^{j}}{j!}\mathrm{d}t\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\tilde{q}_{j-k}^{*}(s)}{\bar{b}^{k}(s)}\left\{v(s+\lambda-\lambda\bar{b}(s))\right.\\&\left.-\sum_{i=0}^{k}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda\bar{b}(s)t]^{i}}{i!}\mathrm{d}V(t)\right\},\quad j\geqslant 1\end{aligned} \tag{13}$$

且当 $j \leqslant 0$ 时，$\sum_{k=0}^{j} = 0$.

定理 4 令 $\tilde{p}_j = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = j\}, j \geqslant 0$ 则对任意初始状态，有

1) 当 $\tilde{\rho} = \lambda(1+\alpha\beta)/\mu \geqslant 1$ 时，$\tilde{p}_j = 0, j=0,1,2,\cdots$ 从而 $\{\tilde{p}_j, j\geqslant 0\}$ 不构成概率分布；

2) 当 $\tilde{\rho} < 1$ 时，$\{\tilde{p}_j, j\geqslant 0\}$ 存在，且构成概率分布，进一步有递推式：

$$\tilde{p}_0 = (1-\tilde{\rho})\frac{1-v(\lambda)}{\lambda E[V]} \tag{14}$$

$$\tilde{p}_j = \frac{1-\tilde{\rho}}{E[V]}\Big\{[1-v(\lambda)]\theta_j + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\bar{V}(t)\frac{(\lambda t)^j}{j!}dt + \sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\Big[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}d\tilde{G}(t)\Big]\Big\}, \quad j \geqslant 1 \tag{15}$$

其中 $v(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dV(t)$，$\tilde{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}d\tilde{G}(t)$；而对 $j \geqslant 1$，

$$\theta_j = \frac{1}{\tilde{g}(\lambda)}\Big\{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}[1-\tilde{G}(t)]dt + \sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\Big[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}d\tilde{G}(t)\Big]\Big\} \tag{16}$$

定理 5 令 $\tilde{P}_v(z)$ 表示该系统队长平稳分布的概率母函数，则

$$\tilde{P}_v(z) = \frac{(1-\tilde{\rho})(1-z)\tilde{g}(\lambda-\lambda z)}{\tilde{g}(\lambda-\lambda z)-z}\cdot\frac{1-v(\lambda-\lambda z)}{\lambda(1-z)E[V]}, \quad |z| < 1 \tag{17}$$

而平均队长

$$\bar{N} = \tilde{\rho} + \frac{\lambda^2 E[\tilde{\chi}^2]}{2(1-\tilde{\rho})} + \frac{\lambda E[V^2]}{2E[V]}, \quad \tilde{\rho} < 1 \tag{18}$$

其中，$E[\tilde{\chi}^2] = \int_0^{\infty} t^2 d\tilde{G}(t)$，$E[V^2] = \int_0^{\infty} t^2 dV(t)$.

定理 6 在该系统中，顾客的稳态等待时间与逗留时间的 LS 变换分别为

$$w_q(s)=\frac{(1-\tilde{\rho})s}{s-\lambda[1-\tilde{g}(s)]}\cdot\frac{1-v(s)}{sE[V]},\quad \mathscr{R}(s)>0 \quad (19)$$

$$w(s)=\frac{s(1-\tilde{\rho})\tilde{g}(s)}{s-\lambda[1-\tilde{g}(s)]}\cdot\frac{1-v(s)}{sE[V]},\quad \mathscr{R}(s)>0 \quad (20)$$

而平均等待时间与平均逗留时间为

$$\overline{W}_q=\frac{\lambda E[\tilde{\chi}^2]}{2(1-\tilde{\rho})}+\frac{E[V^2]}{2E[V]},\quad \tilde{\rho}<1 \quad (21)$$

$$\overline{W}=\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda E[\tilde{\chi}^2]}{2(1-\tilde{\rho})}+\frac{E[V^2]}{2E[V]},\quad \tilde{\rho}<1 \quad (22)$$

3. **可靠性指标**

对 $t\geqslant 0$，令

$$A_i(t)=P\{\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期}\mid_{N(0)=i}\},$$

$$a_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A_i(t)\mathrm{d}t,\quad i\geqslant 0$$

其中 $N(0)$ 表示 $t=0$ 系统中的顾客数.

引理 2 对 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$，有

$$a_0^*(s)=\frac{f(s)}{s}\left\{1-\frac{\tilde{b}(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))}\right\} \quad (23)$$

$$a_i^*(s)=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{\tilde{b}(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))}\right\},\quad i\geqslant 1 \quad (24)$$

而且平稳结果

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lim_{s\to 0^+}sa_i^*(s)=\begin{cases}\lambda(1+\alpha\beta)/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ 1, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \quad (25)$$

其中 $v(s)=\int_0^\infty e^{-st}dV(t)$，$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$.

证明 令 $s_k=\sum_{i=1}^k V_i$，$l_k=\sum_{i=1}^k \tau_i$，$k\geqslant 1$，$s_0=l_0=0$，则

$$
\begin{aligned}
A_0(t)&=P\{\hat{\tau}_1\leqslant t;\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期}\}\\
&=\int_0^t[1-\widetilde{B}(t-x)]dF(x)\\
&\quad+\sum_{j=1}^\infty P\{s_{j-1}\leqslant\hat{\tau}_2<s_j,\hat{\tau}_1+\tilde{b}_1+s_j\leqslant t,\text{时刻 } t \text{ 处}\\
&\qquad\text{于服务员忙期}\}\\
&=\int_0^t[1-\widetilde{B}(t-x)]dF(x)\\
&\quad+\sum_{j=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty P\{s_{j-1}\leqslant\hat{\tau}_2<s_j,\hat{\tau}_2+l_{k-1}\leqslant s_j<\hat{\tau}_j+l_k,\\
&\qquad\hat{\tau}_1+\tilde{b}_1+s_j\leqslant t,\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期}\}\\
&=\int_0^t[1-\widetilde{B}(t-x)]dF(x)\\
&\quad+\sum_{j=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}A_k(t-x-y-u)\frac{(\lambda u)^k}{k!}e^{-\lambda(y+u)}\cdot\\
&\qquad dV(u)dV^{(j-1)}(y)d[F(x)*\widetilde{B}(x)] \qquad (26)
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{\tau}_i$ 表示第 i 个系统闲期长度，$\tilde{b}_i$ 表示第 i 个服务员忙期长度，$i\geqslant 1$；“$*$”号表示卷积.

对 $i\geqslant 1$，同理可得

$$
\begin{aligned}
A_i(t)&=1-\widetilde{B}^{(i)}(t)\\
&\quad+\sum_{j=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}A_k(t-x-y-u)\frac{(\lambda u)^k}{k!}e^{-\lambda(y+u)}\cdot\\
&\qquad dV(u)dV^{(j-1)}(y)d\widetilde{B}^{(i)}(x) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

对式(26)与式(27)取 L 变换，得

$$a_0^*(s)=\frac{f(s)[1-\tilde{b}(s)]}{s}$$

$$+\frac{f(s)\tilde{b}(s)}{1-v(s+\lambda)}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*(s)\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dV(t) \tag{28}$$

$$a_i^*(s)=\frac{1-\tilde{b}^i(s)}{s}+\frac{\tilde{b}^i(s)}{1-v(s+\lambda)}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*(s)\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dV(t),\quad i\geqslant 1 \tag{29}$$

由式(28)与式(29),得 $a_0^*(s)$ 与 $a_i^*(s)$ 的关系式

$$a_i^*(s)=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i(s)[f(s)-sa_0^*(s)]}{f(s)\tilde{b}(s)}\right\},\quad i\geqslant 1 \tag{30}$$

然后将式(30)代入式(28),经过整理即得式(23),再结合式(30)即得式(24).

由于

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}A_i(t)&=\lim_{t\to\infty}\int_0^t dA_i(x)+A_i(0)\\&=\lim_{t\to\infty}\lim_{s\to 0^+}\int_0^t e^{-sx}dA_i(x)+A_i(0)\\&=\lim_{s\to 0^+}\int_0^{\infty}e^{-sx}dA_i(x)+A_i(0)\\&=\lim_{s\to 0^+}sa_i^*(s),\quad i\geqslant 0\end{aligned}$$

于是使用洛必塔法则,结合式(6)与式(7)即得式(25). ∎

这样,仿照本章§1中可靠性指标的讨论,可得下列可靠性指标的相应结果.

定理 7 对 $\mathscr{R}(s)>0$,服务台的瞬态可用度的 L 变换为

$$\varphi_0^*(s)=\frac{\alpha[1-y(s)]f(s)}{s[s+\alpha-\alpha y(s)]}\left\{1-\frac{\tilde{b}(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))}\right\} \tag{31}$$

$$\varphi_i^*(s) = \frac{\alpha[1-y(s)]}{s[s+\alpha-\alpha y(s)]}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))}\right\},\quad i \geqslant 1 \tag{32}$$

而稳态不可用度为

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_i(t) = \lim_{s\to 0^+} s\varphi_i^*(s) = \begin{cases}\lambda\alpha\beta/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha\beta/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{33}$$

其中 $y(s)=\int_0^\infty e^{-st}dY(t)$，$v(s)=\int_0^\infty e^{-st}dV(t)$，$\tilde{b}(s)$ 由定理 1 确定.

定理 8 对 $\mathscr{R}(s)>0$，服务台在 $(0,t]$ 内平均失效次数的 LS 变换为

$$\tilde{m}_0(s) = \frac{\alpha f(s)}{s+\alpha-\alpha y(s)}\left\{1-\frac{\tilde{b}(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))}\right\} \tag{34}$$

$$\tilde{m}_i(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha-\alpha y(s)}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))}\right\},\quad i \geqslant 1 \tag{35}$$

而且长期单位时间内的平均失效次数为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{M}_i(t)}{t} = \begin{cases}\lambda\alpha/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{36}$$

其中 $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$.

定理 9 对该系统，服务台在长期单位时间内的平均失效时间为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[D(t)|_{N(0)=i}]}{t} = \begin{cases}\lambda\alpha\beta/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha\beta/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{37}$$

§4 空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 可修排队系统

1. 问题的叙述

考虑一个 $M/G/1/\infty$ 排队系统，在该系统中，顾客的到达间隔时间序列$\{\tau_i, i\geqslant 1\}$独立、同负指数分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t}, \lambda>0, t\geqslant 0$；顾客实际所需的服务时间序列$\{\chi_i, i\geqslant 1\}$独立、服从一般分布 $G(t)$，且平均服务时间为 $0<\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)<\infty$；服务员具有空竭服务的单重休假，即服务员按照第九章§3 的规则进行休假，其休假时间序列$\{V_i, i\geqslant 1\}$独立、服从一般分布 $V(t)$；系统中有一个服务台，其寿命 X 服从参数为 $\alpha(0\leqslant\alpha<\infty)$的负指数分布

$$X(t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0$$

服务台失效后立即进行修理，其修理时间 Y 是任意分布

$$Y(t)=P\{Y\leqslant t\},\quad t\geqslant 0$$

且记平均修理时间为 $0\leqslant\beta=\int_0^\infty t\mathrm{d}Y(t)<\infty$. 另外，其它有关假设条件与本章§3 中 1)～5)相同.

显然，该模型是我们在第九章§3 中研究的模型与在第十章§1 中研究的模型的组合，它把空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 休假排队模型与 $M/G/1/\infty$ 可修排队模型进行了有机结合.

2. 排队指标

令 $\widetilde{\chi}_n$ 表示第 n 个顾客从开始接受服务的时刻起直到服务结束的时间，其中包括了在该顾客的服务期内，服务台可能发生失效而进行修理的时间，我们称 $\widetilde{\chi}_n$ 为第 n 个顾客的**“广义服务时间”**.

对 $t\geqslant 0$，令

$$\widetilde{G}_n(t)=P\{\widetilde{\chi}_n\leqslant t\},\quad n\geqslant 1$$

则类似本章§1 中式(2)的讨论，有

$$\widetilde{G}(t) \stackrel{\Delta}{=} \widetilde{G}_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t Y^{(k)}(t-x)e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}dG(x) \qquad (1)$$

与 n 无关，其 LS 变换为

$$\widetilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}d\widetilde{G}(t) = g(s+\alpha-\alpha y(s)), \quad \mathscr{R}(s) \geqslant 0 \qquad (2)$$

且平均“广义服务时间”为

$$E[\widetilde{\chi}_n] = (1+\alpha\beta)/\mu \qquad (3)$$

由于负指数分布的“无记忆”性质，可以推证 $\{\widetilde{\chi}_n, n\geqslant 1\}$ 相互独立、同分布 $\widetilde{G}(t)$，因此我们容易得如下引理.

引理 1 如果我们把 $\widetilde{\chi}_n$ 直接理解为第 n 个顾客的“服务时间”，则所研究的系统等价于服务员具有空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统，其中输入过程是参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 流，顾客的服务时间序列 $\{\widetilde{\chi}_n, n\geqslant 1\}$ 独立、同分布 $\widetilde{G}(t)$，服务员的休假时间序列 $\{V_i, i\geqslant 1\}$ 独立、同一般分布 $V(t)$.

因此，我们可以仿照第九章 § 3 的讨论，来研究这个系统感兴趣的各种排队指标，例如队长的瞬态和稳态分布，稳态队长与等待时间的随机分解等，下面我们仅列举一些主要结果.

定理 1 对 $\mathscr{R}(s)>0, i\geqslant 1$，有

$$\widetilde{p}_{00}^*(s) = \frac{1-f(s)}{s}\cdot\left\{1+\frac{f(s)\bar{b}(s)}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)\bar{b}(s)]-v(s+\lambda-\lambda\widetilde{b}(s))}\right\} \qquad (4)$$

$$\widetilde{p}_{i0}^*(s) = \frac{[1-f(s)]\bar{b}^i(s)}{s\{1+v(s+\lambda)[1-f(s)\bar{b}(s)]-v(s+\lambda-\lambda\widetilde{b}(s))\}} \qquad (5)$$

其中 $\bar{b}(s)$ 由本章 § 3 中定理 1 确定.

定理 2 对 $\mathscr{R}(s)>0, i, j\geqslant 1$，有

$$\tilde{p}_{0j}^{*}(s) = \frac{f(s)}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)\tilde{b}(s)]-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))} \cdot \{\tilde{q}_j^{*}(s)+\tilde{\delta}_j^{*}(s)\} \tag{6}$$

$$\tilde{p}_{ij}^{*}(s) = \sum_{k=1}^{i}\tilde{q}_{j-i+k}^{*}(s)\tilde{b}^{k-1}(s) + \frac{\tilde{b}^{i-1}(s)\{\{v(s+\lambda)[1-f(s)\tilde{b}(s)]-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))\}\tilde{q}_j^{*}(s)+\tilde{\delta}_j^{*}(s)\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)\tilde{b}(s)]-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))} \tag{7}$$

其中 $\tilde{q}_j^{*}(s)$ 与 $\tilde{\delta}_j^{*}(s)$ 分别由本章§3 中式(12)与式(13)确定，$j\geqslant 1$.

定理 3 令 $\tilde{p}_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j\geqslant 0$，则对任意初始状态，有

1）当 $\tilde{\rho}=\frac{\lambda}{\mu}(1+\alpha\beta)\geqslant 1$ 时，$\tilde{p}_j=0, j\geqslant 0$，从而 $\{\tilde{p}_j, j\geqslant 0\}$ 不构成概率分布；

2）当 $\tilde{\rho}<1$ 时，$\{\tilde{p}_j, j\geqslant 0\}$ 存在，且构成概率分布，进一步有如下递推式：

$$\tilde{p}_0 = \frac{(1-\tilde{\rho})}{\lambda E[V]+v(\lambda)} \tag{8}$$

$$\tilde{p}_j = \frac{\lambda(1-\tilde{\rho})}{\lambda E[V]+v(\lambda)}\left\{\tilde{\theta}_j + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\overline{V}(t)\frac{(\lambda t)^j}{j!}dt + \sum_{k=1}^{j-1}\tilde{\theta}_{j-k}\left[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dV(t)\right]\right\}, \quad j\geqslant 1 \tag{9}$$

其中 $\tilde{\theta}_j$ 由本章§3 中式(16)确定，$j\geqslant 1$，$v(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dV(t)$.

定理 4 令 $\tilde{P}_v(z)$ 表示该系统队长平稳分布的概率母函数，则

$$\widetilde{P}_0(z) = \frac{(1-\tilde{\rho})(1-z)\tilde{g}(\lambda-\lambda z)}{\tilde{g}(\lambda-\lambda z)-z} \cdot \frac{1-v(\lambda-\lambda z)+(1-z)v(\lambda)}{(1-z)\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}}, \quad |z|<1 \tag{10}$$

而平均队长

$$\overline{N} = \tilde{\rho} + \frac{\lambda^2 E[\tilde{\chi}^2]}{2(1-\tilde{\rho})} + \frac{\lambda^2 E[V^2]}{2\{\lambda E[V]+v(\lambda)\}}, \quad \tilde{\rho}<1 \tag{11}$$

定理 5 在该系统中，顾客的稳态等待时间与逗留时间分布的 LS 变换表达式分别为

$$w_q(s) = \frac{(1-\tilde{\rho})s}{s-\lambda[1-\tilde{g}(s)]} \cdot \frac{sv(\lambda)+\lambda[1-v(s)]}{s\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}} \tag{12}$$

$$w(s) = \frac{s(1-\tilde{\rho})\tilde{g}(s)}{s-\lambda[1-\tilde{g}(s)]} \cdot \frac{sv(\lambda)+\lambda[1-v(s)]}{s\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}} \tag{13}$$

而且平均等待时间与平均逗留时间为

$$\overline{W}_q = \frac{\lambda E[\tilde{\chi}^2]}{2(1-\tilde{\rho})} + \frac{\lambda E[V^2]}{2\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}} \tag{14}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[\tilde{\chi}^2]}{2(1-\tilde{\rho})} + \frac{\lambda E[V^2]}{2\{v(\lambda)+\lambda E[V]\}} \tag{15}$$

3. 可靠性指标

对 $t \geqslant 0$，令

$$A_i(t) = P\{\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期} \mid_{N(0)=i}\}$$

$$a_i^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} A_i(t) dt, \quad i \geqslant 0$$

引理 2 对 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$,有

$$a_0^*(s)=\frac{f(s)}{s}\cdot\left\{1-\frac{\tilde{b}(s)[1-v(s)+v(s+\lambda)-v(s+\lambda)f(s)]}{1+t(s)}\right\}\tag{16}$$

$$a_i^*(s)=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i(s)[1-v(s)+v(s+\lambda)-v(s+\lambda)f(s)]}{1+t(s)}\right\},\quad i\geqslant 1\tag{17}$$

而平稳结果

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lim_{s\to 0^+}sa_i^*(s)=\begin{cases}\lambda(1+\alpha\beta)/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ 1, & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases}\tag{18}$$

其中 $t(s)=v(s+\lambda)[1-f(s)\tilde{b}(s)]-v(s+\lambda-\lambda\tilde{b}(s))$.

证明 令 $l_k=\sum_{i=1}^{k}\tau_i,k\geqslant 1$,且 $l_0=0$,则

$$\begin{aligned}A_0(t)=&P\{\hat{\tau}_1\leqslant t;\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期}\}\\=&\int_0^t[1-\tilde{B}(t-x)]\mathrm{d}F(x)\\&+P\{V_1<\hat{\tau}_2;\hat{\tau}_1+\tilde{b}_1+\hat{\tau}_2\leqslant t;\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期}\}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}P\{\hat{\tau}_2+l_{k-1}\leqslant V_1<\hat{\tau}_2+l_k;\hat{\tau}_1-\tilde{b}_1-V_1\leqslant t;\\&\qquad\qquad\text{时刻 } t \text{ 处于服务员忙期}\}\\=&\int_0^t[1-\tilde{B}(t-x)]\mathrm{d}F(x)\\&+\int_0^t\int_0^{t-x}A_1(t-x-y)V(y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}[F(x)*\tilde{B}(x)]\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}A_k(t-x-y)\frac{(\lambda y)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}V(y)\mathrm{d}[F(x)*\tilde{B}(x)]\end{aligned}\tag{19}$$

其中 $\hat{\tau}_i,\tilde{b}_i$ 分别表示系统的第 i 个闲期长度与第 i 个服务员忙期长度,$i\geqslant 1$;V_1 表示第一个服务员假期长度.

对 $i\geqslant 1$，同理可得

$$
\begin{aligned}
A_i(t) &= 1-\widetilde{B}^{(i)}(t) \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{t-x} A_1(t-x-y)V(y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}\widetilde{B}^{(i)}(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x} A_k(t-x-y)\frac{(\lambda y)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}V(y)\mathrm{d}\widetilde{B}^{(i)}(x)
\end{aligned} \tag{20}
$$

对式(19)与式(20)取L变换，得

$$
\begin{aligned}
a_0^*(s) &= \frac{f(s)[1-\tilde{b}(s)]}{s} + f^2(s)v(s+\lambda)\tilde{b}(s)a_1^*(s) \\
&\quad + f(s)\tilde{b}(s)\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{d}V(t)
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
a_i^*(s) &= \frac{1-\tilde{b}^i(s)}{s} + f(s)v(s+\lambda)\tilde{b}^i(s)a_1^*(s) \\
&\quad + \tilde{b}^i(s)\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{d}V(t), \quad i\geqslant 1
\end{aligned} \tag{22}
$$

由式(21)与式(22)，得 $a_0^*(s)$ 与 $a_i^*(s)$ 的关系式：

$$
a_i^*(s) = \frac{1}{s}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i(s)[f(s)-sa_0^*(s)]}{f(s)\tilde{b}(s)}\right\}, \quad i\geqslant 1 \tag{23}
$$

将式(23)代回到式(21)，经过整理即得式(16)，再结合式(23)即得式(17). 然后使用洛必塔法则，结合本章§3中式(6)与式(7)即可得式(18).

这样，仿照本章§1中可靠性指标的讨论，完全可得下列相应可靠性指标的类似结果.

定理6 对 $\mathscr{R}(s)>0$，服务台的瞬态不可用度的L变换为

$$
\varphi_i^*(s) = \frac{\alpha[1-y(s)]}{s[s+\alpha-\alpha y(s)]}\cdot[sa_i^*(s)], \quad i\geqslant 0 \tag{24}
$$

而且稳态不可用度为

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_i(t)=\lim_{s\to 0^+}s\varphi_i^*(s)=\begin{cases}\lambda\alpha\beta/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha\beta/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{25}$$

定理 7 对 $\mathscr{R}(s)>0$，服务台在 $(0,t]$ 内平均失效次数的 LS 变换为

$$\widetilde{m}_i(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha-\alpha y(s)}\cdot[sa_i^*(s)],\quad i\geqslant 0 \tag{26}$$

而长期单位时间内的平均失效次数为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{M}_i(t)}{t}=\begin{cases}\lambda\alpha/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{27}$$

定理 8 服务台在长期单位时间内的平均失效时间为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[D(t)|_{N(0)=i}]}{t}=\begin{cases}\lambda\alpha\beta/\mu, & \tilde{\rho}<1\\ \alpha\beta/(1+\alpha\beta), & \tilde{\rho}\geqslant 1\end{cases} \tag{28}$$

§5 服务设备可修的机器维修模型

1. 问题的叙述

在第三章中，我们所讨论的机器维修模型都是假定服务设备（或修理设备）是不会失效的，可是在实践中经常会碰到服务设备本身发生失效而不能为发生故障的机器服务（修理），此时需要将失效的服务设备修好以后，服务设备才能继续为有故障的机器服务．显然，这是一类更广泛的机器维修模型．在本节中我们将研究这类模型．

假定有 $m+1$ 台机器和一个服务设备（当然只有一个维修人员）．$m+1$ 台机器相互独立地并行运行，每台机器的工作寿命 τ 都服从相同的负指数分布

$$F(t)=P\{\tau\leqslant t\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,\lambda>0$$

当一台机器发生故障时，若服务设备空闲，则服务设备立即对其服务（修理）；若服务设备正在为其它故障的机器服务时，则刚发生故障的机器需要排队等待服务. 服务完毕的机器立即转为工作状态. 服务设备对故障机器的实际服务时间 χ 都服从相同的一般分布

$$G(t) = P\{\chi \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0$$

且设平均服务时间为 $0 < \dfrac{1}{\mu} = \displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t) < \infty$.

而服务设备的寿命 X 服从负指数分布

$$X(t) = P\{X \leqslant t\} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0, 0 \leqslant \alpha < \infty$$

服务设备失效后立即进行修理，其修理时间 Y 服从一般分布

$$Y(t) = P\{Y \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0$$

且设平均修理时间为 $0 \leqslant \beta = \displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{d}Y(t) < \infty$. 进一步假设：

1）在服务设备的空闲期间，服务设备既不会发生失效也不会变坏（不影响服务设备的使用寿命）；

2）当服务设备失效时，正在接受其服务的故障机器需要等待其修复，再继续接受服务，已服务过的时间仍然有效；

3）故障的机器修复后完全恢复它的功能，其寿命仍为 τ. 而服务设备失效修复后也完全恢复它的功能，其寿命仍为 X；

4）随机变量 τ、χ、X 和 Y 都是互相独立的.

2. 排队指标

我们用 $T_1, T_2, \cdots$ 表示故障的机器相继的被服务结束的时刻（$T_0 = 0^-$），即从 $t=0$ 开始，在一系列故障机器被服务结束的时刻中，T_n 表示第 n 次机器服务结束恢复工作的时刻. 假设：

$t=0^-$ 时有一个故障的机器服务结束，而且令 $\zeta(t)$ 表示时刻 t 系统中正在工作的机器数，则

$$0 \leqslant \zeta(t) \leqslant m + 1$$

又令 $\zeta_n = \zeta(T_n^-)$，ζ_n 是第 n 次机器服务结束时刻 T_n 之前的瞬时，正在工作的机器数，因此刚服务结束的机器不包括在内，于是

$$0 \leqslant \zeta_n \leqslant m$$

由于机器的寿命分布和服务设备的寿命分布都是负指数分布，由“无记忆”，容易得出时刻 T_n 是过程 $\{\zeta(t),t\geqslant 0\}$ 的更新点，因此，过程 $\{\zeta_n,T_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是有限状态空间 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots,m\}$ 上的马尔柯夫更新过程，$\{\zeta_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $\mathbf{E}$ 的马尔柯夫链.

令 $\widetilde{\chi}_n$ 表示服务设备对第 n 次发生故障的机器从开始服务的时间起直到将这台机器服务结束的时间长度，其中包括了在这台被服务的机器的服务期间内，服务设备可能失效而进行修理的时间.

对 $t\geqslant 0$，令

$$\widetilde{G}_n(t)=P\{\widetilde{\chi}_n\leqslant t\}$$

则类似本章§1 中式(2)的讨论有

$$\widetilde{G}(t)\stackrel{\Delta}{=}\widetilde{G}_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t Y^{(k)}(t-x)\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}\mathrm{d}G(x) \qquad (1)$$

与 n 无关. 其 LS 变换为

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(s)&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\widetilde{G}(t)\\&=g(s+\alpha-\alpha y(s)),\quad \mathscr{R}(s)\geqslant 0\end{aligned} \qquad (2)$$

其中 $y(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}Y(t)$. 而平均“服务时间”为

$$E[\widetilde{\chi}_n]=(1+\alpha\beta)/\mu \qquad (3)$$

引理 1 如果我们把 $\widetilde{\chi}_n$ 直接理解为每台故障机器所需要的服务时间，则我们所研究的模型是一个通常意义下的机器维修模型，其中每台机器的寿命服从同参数 $\lambda(>0)$ 的负指数分布，故障后修理时间服从分布 $\widetilde{G}(t)$，而有 $m+1$ 台机器，一个修理人员.

根据引理 1，我们可以仿照参考文献[126]第五章的讨论，来得到该系统的排队指标，例如 $\zeta(t)$ 与 ζ_n 的极限分布，故障机器的等待时间分布等. 特别地，当 $\alpha=0$，即服务设备的寿命无限长时，所得的排队结果与参考文献[126]第五章的结果完全吻合.

引理 2 对 $\mathscr{R}(s)\geqslant 0$，令

$$
\begin{aligned}
A_{ir}^{[n]}(s) &= E\left\{ e^{-sT_n}\begin{pmatrix}\zeta_n \\ r\end{pmatrix}\Big|_{\zeta_0=i}\right\} \\
&= \sum_{j=0}^{m}\int_0^{\infty} e^{-st}\begin{pmatrix} j \\ r\end{pmatrix} dP\{\zeta_n = j, T_n \leqslant t|_{\zeta_0=i}\}
\end{aligned}
$$

及

$$
\Psi_{ir}(s,u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{ir}^{[n]}(s)u^n,
$$

$$
|u| \leqslant 1; i,r = 0,1,\cdots,m; n = 0,1,2,\cdots
$$

则

$$
\begin{aligned}
\Psi_{ir}(s,u) = \frac{C_r(s,u)}{\sum\limits_{k=0}^{m+1} H_k(s)/C_{k-1}(s,u)} & \left\{ \sum_{k=r+1}^{m+1} \frac{H_k(s)}{C_{k-1}(s,u)} \right. \\
& \cdot \sum_{k=0}^{r} \frac{\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}}{u\tilde{g}(s+k\lambda)C_{k-1}(s,u)} \\
& \left. - \sum_{k=0}^{r} \frac{H_k(s)}{C_{k-1}(s,u)} \cdot \sum_{k=r+1}^{m} \frac{\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}}{u\tilde{g}(s+k\lambda)C_{k-1}(s,u)} \right\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$表示从 i 中任取 k 的组合数($k \leqslant i$)，且规定$\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}=1$，$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}=0$ ($k>i$)；而

$$
H_k(s) = \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \frac{(m+1)\lambda}{s+(m+1)\lambda}, \quad k = 0,1,\cdots,m+1 \tag{5}
$$

$$
\begin{cases}
C_k(s,u) = \prod\limits_{j=0}^{k} \dfrac{u\tilde{g}(s+j\lambda)}{1-u\tilde{g}(s+j\lambda)}, \quad k = 0,1,2,\cdots \\
C_{-1}(s,u) \equiv 1
\end{cases} \tag{6}
$$

且在式(4)的求和号中，当上限小于下限时，求和为零.

证明 利用全概率分解，得

$$A_{ir}^{[n+1]}(s) = E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_0=i} \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_n=j,\zeta_0=i} \right\}$$

$$\cdot P\{\zeta_n = j \Big|_{\zeta_0=i}\} \tag{7}$$

1)当 $j<m$ 时,有

$$E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_n=j,\zeta_0=i} \right\}$$

$$= E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_n=j} \right\}$$

$$= \int_0^{\infty} E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{T_{n+1}-T_n=x,\zeta_n=j} \right\}$$

$$\cdot \mathrm{d}P\{T_{n+1} - T_n \leqslant x|_{\zeta_n=j}\}$$

$$= \int_0^{\infty} E\left\{ \mathrm{e}^{-s(T_n+x)} \binom{j+1}{r} \mathrm{e}^{-r\lambda x}|_{\tilde{\chi}=x,\zeta_n=j} \right\} \mathrm{d}\tilde{G}(x)$$

$$= \binom{j+1}{r} \tilde{g}(s+r\lambda) E\{\mathrm{e}^{-sT_n}|_{\zeta_n=j}\}, \quad n \geqslant 0 \tag{8}$$

2)当 $j=m$ 时,有

$$E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_n=m,\zeta_0=i} \right\}$$

$$= E\left\{ \mathrm{e}^{-sT_{n+1}} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_n=m} \right\}$$

$$= \int_0^{\infty} E\left\{ \mathrm{e}^{-s(T_n+x+\eta)} \binom{\zeta_{n+1}}{r} \Big|_{\zeta_n=m,\tilde{\chi}=x} \right\} \mathrm{d}\tilde{G}(x) \tag{9}$$

其中 η 表示 $m+1$ 台机器同时工作起,直到有一台机器发生故障为止的这段时间.容易推得

$$P\{\eta \leqslant t\} = 1 - \mathrm{e}^{-(m+1)\lambda t}, \quad t \geqslant 0 \tag{10}$$

于是式(9)可写成

$$E\left\{e^{-sT_{n+1}}\binom{\zeta_{n+1}}{r}\Big|_{\zeta_n=m}\right\}$$

$$=\binom{m}{r}\tilde{g}(s+r\lambda)\frac{(m+1)\lambda}{s+(m+1)\lambda}E\{e^{-sT_n}|_{\zeta_n=m}\},$$

$$n\geqslant 0 \qquad (11)$$

将式(8)与式(11)代入式(7),经整理得:

1)当 $r=0$ 时,

$$A_{i0}^{[n+1]}(s)=\tilde{g}(s)\left\{A_{i0}^{[n]}(s)-\frac{s}{s+(m+1)\lambda}A_{im}^{[n]}(s)\right\} \qquad (12)$$

2)当 $r=0,1,2,\cdots,m$ 时

$$A_{ir}^{[n+1]}(s)=\tilde{g}(s+r\lambda)\left\{A_{ir}^{[n]}(s)+A_{i,r-1}^{[n]}(s)\right.$$

$$\left.+\left[\binom{m}{r}\frac{(m+1)\lambda}{s+(m+1)\lambda}-\binom{m+1}{r}\right]A_{im}^{[n]}(s)\right\}$$

$$(13)$$

于是,注意到

$$A_{ir}^{[0]}(s)=E\left\{e^{-sT_0}\binom{\zeta_0}{r}\Big|_{\zeta_0=i}\right\}=\binom{i}{r},\quad 0\leqslant i、r\leqslant m \qquad (14)$$

可得

$$\Psi_{i0}(s,u)=\frac{1}{1-u\tilde{g}(s)}\left\{1-u\tilde{g}(s)\frac{s}{s+(m+1)\lambda}\Psi_{im}(s,u)\right\}$$

$$(15)$$

$$\Psi_{ir}(s,u)=\frac{u\tilde{g}(s+r\lambda)}{1-u\tilde{g}(s+r\lambda)}\left\{\Psi_{i,r-1}(s,u)\right.$$

$$\left.+\left[\binom{m}{r}\frac{(m+1)\lambda}{s+(m+1)\lambda}-\binom{m+1}{r}\right]\Psi_{im}(s,u)\right\}$$

$$+\frac{\binom{i}{r}}{1-u\tilde{g}(s+r\lambda)},\quad 1\leqslant r\leqslant m \tag{16}$$

将式(15)两端同除 $C_0(s,u)$，式(16)两端同除 $C_r(s,u)$，然后关于 $r=0,1,2,\cdots,l(0\leqslant l\leqslant m)$ 相加，得

$$\sum_{r=0}^{l}\frac{\Psi_{ir}(s,u)}{C_r(s,u)}=\sum_{r=1}^{l}\frac{\Psi_{i,r-1}(s,u)}{C_{r-1}(s,u)}+\sum_{r=0}^{l}\frac{\binom{i}{r}}{C_{r-1}(s,u)u\tilde{g}(s+r\lambda)}+\sum_{r=0}^{l}\left[\binom{m}{r}\frac{(m+1)\lambda}{(m+1)\lambda+s}-\binom{m+1}{r}\right]\frac{\Psi_{im}(s,u)}{C_{r-1}(s,u)},\quad 0\leqslant l\leqslant m \tag{17}$$

于是

$$\frac{\Psi_{il}(s,u)}{C_l(s,u)}=\sum_{k=0}^{l}\frac{\binom{i}{k}}{C_{k-1}(s,u)u\tilde{g}(s+k\lambda)}+\sum_{k=0}^{l}\left[\binom{m}{k}\frac{(m+1)\lambda}{(m+1)\lambda+s}-\binom{m+1}{k}\right]\frac{\Psi_{im}(s,u)}{C_{r-1}(s,u)},\quad 0\leqslant l\leqslant m \tag{18}$$

在式(18)中，令 $l=m$，可解出 $\Psi_{im}(s,u)$，得

$$\Psi_{im}(s,u)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{i}{k}}{C_{k-1}(s,u)u\tilde{g}(s+k\lambda)}\Bigg/\sum_{k=0}^{m+1}\frac{H_k(s)}{C_{k-1}(s,u)} \tag{19}$$

将式(19)代回式(18)，经整理就得到引理 2 的结果. 证毕.

3. **可靠性指标**

1)时刻 t 服务设备失效的概率

马尔柯夫更新过程$\{\zeta_n, T_n; n=0,1,2,\cdots\}$的半马尔柯夫核为

$$q_{ij}(t) = P\{\zeta_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leqslant t|_{\zeta_n = i}\}$$

$$= \begin{cases} \int_0^t \binom{i+1}{j} e^{-j\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{i+1-j} d\widetilde{G}(x), \\ \qquad j = 0,1,\cdots,i+1; i = 0,1,\cdots,m-1 \\ (1 - e^{-(m+1)\lambda t}) * q_{m-1,j}(t), \quad j = 0,1,\cdots,m \end{cases} \tag{20}$$

其马尔柯夫更新函数为

$$R_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\zeta_n = j, T_n \leqslant t|_{\zeta_0 = i}\}, \quad 0 \leqslant i,j \leqslant m; t \geqslant 0 \tag{21}$$

对 $t \geqslant 0$，令

$$\Phi_i(t) = P\{\text{时刻 } t \text{ 服务设备失效} |_{\zeta_0 = i}\}, 0 \leqslant i \leqslant m$$

$$U_i(t) = P\{\text{时刻 } t \text{ 服务设备失效}, T_1 > t|_{\zeta_0 = i}\}, 0 \leqslant i \leqslant m$$

则由定义和全概率公式可推证$\{\Phi_i(t)\}$满足马尔柯夫更新方程组

$$\Phi_i(t) = \sum_{j=0}^{i+1} q_{ij}(t) * \Phi_j(t) + U_i(t), \quad t \geqslant 0; 0 \leqslant i \leqslant m \tag{22}$$

定理 1 令 $\varphi_i^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\Phi_i(t)dt$，则对 $\mathscr{R}(s) > 0$，有

$$\varphi_i^*(s) = \frac{\alpha[1 - y(s)]}{s[s + \alpha - \alpha y(s)]} \cdot \left\{1 - \frac{s}{s + (m+1)\lambda}\Psi_{im}(s,1)\right\},$$
$$i = 0,1,2,\cdots,m \tag{23}$$

而平稳结果

$$\lim_{t \to \infty}\Phi_i(t) = \lim_{s \to 0^+} s\varphi_i^*(s) = \frac{(m+1)\lambda\alpha\beta}{(m+1)\lambda\alpha\beta + \mu B_m} \tag{24}$$

其中 $B_m = \left[\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}\right]^{-1}$，$C_j = \prod_{k=1}^{j}\frac{\widetilde{g}(k\lambda)}{1 - \widetilde{g}(k\lambda)}$，$1 \leqslant j \leqslant m$，$C_0 = 1$

证明 1)由参考文献[67]第 324 页的结果，有限状态的马尔柯夫更新方程组(22)有惟一解

$$\Phi_i(t)=\sum_{j=0}^{m}R_{ij}(t)*U_j(t),\quad 0\leqslant i\leqslant m \tag{25}$$

其中 $R_{ij}(t)$是马尔柯夫更新函数式(21).对上式作L变换,得

$$\varphi_i^*(s)=\sum_{j=0}^{m}r_{ij}(s)\cdot u_j^*(s),\quad 0\leqslant i\leqslant m \tag{26}$$

其中 $u_j^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}U_j(t)dt$ 为 $U_j(t)$ 的 L 变换, $r_{ij}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dR_{ij}(t)$ 为 $R_{ij}(t)$ 的LS变换.

2)对 $\mathscr{R}(s)>0$,有

$$\begin{cases} u_j^*(s)=\dfrac{\alpha-\alpha y(s)}{s[s+\alpha-\alpha y(s)]}[1-\tilde{g}(s)], & 0\leqslant j\leqslant m-1 \\ u_m^*(s)=\dfrac{(m+1)\lambda}{(m+1)\lambda+s}u_0^*(s) \end{cases} \tag{27}$$

事实上,当 $j=0,1,2,\cdots,m-1$ 时,

$$\begin{aligned} U_j(t) &=P\{\text{时刻 } t \text{ 服务设备失效}, T_1>t\mid_{\zeta_0=j}\} \\ &=P\{\text{时刻 } t \text{ 服务设备失效}, \tilde{\chi}>t\} \\ &=\tilde{\Phi}(t)-\int_0^t\tilde{\Phi}(t-x)d\tilde{G}(x) \end{aligned} \tag{28}$$

其中式(28)的推证完全类似于本章§1中的式(19),而 $\tilde{\Phi}(t)$由其中引理3给出.

当 $j=m$ 时,由于 $T_1=\eta+\tilde{\chi}$,其中 η 表示 $m+1$ 台机器同时工作起,直到有一台机器发生故障为止的这段时间,即是服务设备的闲期长度,它的分布函数由式(10)给出.

显然 η 与 $\tilde{\chi}$ 相互独立,于是

$$\begin{aligned} U_m(t) &=P\{\text{时刻 } t \text{ 服务设备失效}, \eta+\tilde{\chi}>t\} \\ &=\int_0^t P\{\text{时刻 } t-x \text{ 服务设备失效}, \tilde{\chi}>t-x\mid_{\zeta_0=0}\}\cdot \\ &\quad dP\{\eta\leqslant x\} \\ &=U_0(t)*\eta(t) \end{aligned} \tag{29}$$

然后对式(28)与式(29)取L变换,并结合本章§1中引理3即得式

(27).

3)将式(27)代入式(26),经整理,得

$$\varphi_i^*(s)=u_0^*(s)\left\{\sum_{j=0}^{m}r_{ij}(s)-\frac{s}{(m+1)\lambda+s}r_{im}(s)\right\},\quad 0\leqslant i\leqslant m \tag{30}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}r_{ij}(s)&=\sum_{j=0}^{m}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}R_{ij}(t)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}P\{\zeta_n=j,T_n\leqslant t|_{\zeta_0=i}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\binom{\zeta_n}{0}\mathrm{d}P\{\zeta_n=j,T_n\leqslant t|_{\zeta_0=i}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\mathrm{e}^{-sT_n}|_{\zeta_0=i}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}A_{i0}^{[n]}(s)=\Psi_{i0}(s,1)\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}r_{im}(s)&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}R_{im}(t)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}P\{\zeta_n=m,T_n\leqslant t|_{\zeta_0=i}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E\left\{\mathrm{e}^{-sT_n}\binom{\zeta_n}{m}\bigg|_{\zeta_0=i}\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}A_{im}^{[n]}(s)=\Psi_{im}(s,1)\end{aligned}\tag{32}$$

于是将上两式代入式(30)得

$$\varphi_i^*(s)=u_0^*(s)\left\{\Psi_{i0}(s,1)-\frac{s}{(m+1)\lambda+s}\Psi_{im}(s,1)\right\}\tag{33}$$

然后将式(27)中 $j=0$ 的结果和将式(4)中 $r=0$ 的结果代入式(33)即得式(23).

又因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi_i(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{s\to0^+}\int_0^{\infty}e^{-sx}d\Phi_i(x)=\lim\limits_{s\to0^+}s\varphi_i^*(s)$

因此，使用洛必塔法则即证式(24).

2)$(0,t]$中服务设备的平均失效次数

我们用 $\tilde{M}_i(t)$表示系统从状态 i 出发，在$(0,t]$中服务设备的平均失效次数. 令

$$q_{ij}^{[k]}(t)$$

$$=P\{\zeta_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\leqslant t,\text{在第 } n+1 \text{ 次故障机器的服务期内服务设备恰发生 } k \text{ 次失效}\mid_{\zeta_n=i}\},$$

$$k=0,1,2,\cdots;\quad i、j=0,1,\cdots,m$$

则

$$\begin{cases}q_{ij}^{[k]}(t)=\int_0^t\binom{i+1}{j}e^{-j\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{i+1-j}d\tilde{G}^{[k]}(x),\\ \qquad j=0,1,\cdots,i+1;i=0,1,\cdots,m-1\\ q_{mj}^{[k]}(t)=(1-e^{-(m+1)\lambda t})*q_{0j}^{[k]}(t),\quad j=0,1,2,\cdots,m\end{cases}\tag{34}$$

其中

$$\tilde{G}^{[k]}(t)=P\{\tilde{\chi}\leqslant t,\text{且在 }\tilde{\chi}\text{ 内服务设备恰发生 } k \text{ 次失效}\}$$

$$=\int_0^t Y^{(k)}(t-x)e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!}dG(x),\quad k=0,1,2,\cdots\tag{35}$$

由定义和全概率公式可推得$\{\tilde{M}_i(t)\}$满足方程组

$$\tilde{M}_i(t)=\sum_{j=0}^{i+1}\sum_{k=0}^{\infty}q_{ij}^{[k]}(t)*[\tilde{M}_j(t)+k]+\tilde{W}_i(t),\quad i=0,1,2,\cdots,m\tag{36}$$

其中 $\tilde{W}_i(t)$表示系统从状态 i 出发，在$(0,t]$中没有发生状态转移时服务设备的平均失效次数，即

$$\tilde{W}_i(t)=E\{T_1>t,(0,t]\text{中服务设备的失效次数}\mid_{\zeta_0=i}\},\quad i=0,1,2,\cdots,m\tag{37}$$

记

$$\widetilde{V}_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\left[\sum_{j=0}^{i+1} q_{ij}^{[k]}(t)\right]$$

则

$$\widetilde{V}_i(t) = E\{T_1 \leqslant t, (0, T_1] \text{中服务设备的失效次数} |_{\zeta_0=i}\},$$

$$i = 0,1,2,\cdots,m \qquad (38)$$

若注意到 $q_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ij}^{[k]}(t)$,则式(36)变为

$$\widetilde{M}_i(t) = \sum_{j=0}^{i+1} q_{ij}(t) * \widetilde{M}_j(t) + \widetilde{V}_i(t) + \widetilde{W}_i(t),$$

$$i = 0,1,2,\cdots,m \qquad (39)$$

与式(25)同样理由,马尔柯夫更新方程组(39)有惟一解

$$\widetilde{M}_i(t) = \sum_{j=0}^{m} R_{ij}(t) * [\widetilde{V}_j(t) + \widetilde{W}_j(t)], \quad i = 0,1,2,\cdots,m \qquad (40)$$

其中 $R_{ij}(t)$ 是马尔柯夫更新函数式(21).

定理 2 令 $\widetilde{m}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\widetilde{M}_i(t)$, 则对 $\mathscr{R}(s)>0$,有

$$\widetilde{m}_i(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha - \alpha y(s)}\left\{1 - \frac{s}{(m+1)\lambda + s}\Psi_{im}(s,1)\right\},$$

$$i = 0,1,2,\cdots,m \qquad (41)$$

而且平稳结果

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{M}_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0^+} s\widetilde{m}_i(s)$$

$$= \frac{(m+1)\lambda\alpha}{(m+1)\lambda(1+\alpha\beta) + \mu B_m} \qquad (42)$$

证明 1)对式(40)作 LS 变换,得

$$\widetilde{m}_i(s) = \sum_{j=0}^{m} r_{ij}(s)[\widetilde{v}_j(s) + \widetilde{w}_j(s)], \quad i = 0,1,2,\cdots,m \quad (43)$$

2)对 $\mathscr{R}(s)>0$,有

$$
\begin{cases}
\tilde{v}_j(s) + \tilde{w}_j(s) = \dfrac{\alpha[1 - \tilde{g}(s)]}{s + \alpha - \alpha y(s)}, \quad j = 0,1,\cdots,m-1 \\
\tilde{v}_m(s) + \tilde{w}_m(s) = \dfrac{(m+1)\lambda}{(m+1)\lambda + s}[\tilde{v}_0(s) + \tilde{w}_0(s)]
\end{cases} \tag{44}
$$

事实上，当 $j=0,1,2,\cdots,m-1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_j(t) + \tilde{W}_j(t) = & E\{\tilde{\chi}_1 \leqslant t, (0,\tilde{\chi}_1] \text{ 中服务设备的失效次数}\} \\
& + E\{\tilde{\chi}_1 > t, (0,t] \text{ 中服务设备的失效次数}\}
\end{aligned} \tag{45}
$$

考虑一个单部件可靠性系统，其工作寿命 X 有分布 $X(t) = 1 - e^{-\alpha t}, t \geqslant 0$，系统失效后立即修理，其修理时间 Y 有一般分布 $Y(t)$，平均修理时间为 $\beta(0 \leqslant \beta < \infty)$. 系统修复如新，立即转为工作状态，进一步设 $t=0$ 时刻系统是新的，而且 X 与 Y 相互独立.

令 $\tilde{M}(t)$ 表示系统在 $(0,t]$ 内失效的平均次数，$\tilde{m}(s)$ 为其 LS 变换，则本章 §1 中的引理 4 成立，即对 $\mathscr{R}(s) \geqslant 0$，有

$$
\tilde{m}(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha - \alpha y(s)} \tag{46}
$$

而且

$$
\lim_{t \to \infty} \frac{\tilde{M}(t)}{t} = \lim_{s \to 0^+} s\tilde{m}(s) = \frac{\alpha}{1 + \alpha\beta} \tag{47}
$$

利用全概率公式，用 $\tilde{\chi}_1$ 对 $\tilde{M}(t)$ 进行分解，得

$$
\tilde{M}(t) = \tilde{V}_j(t) + \tilde{W}_j(t) + \int_0^t \tilde{M}(t - x) \mathrm{d}\tilde{G}(x)
$$

于是

$$
\tilde{V}_j(t) + \tilde{W}_j(t) = \tilde{M}(t) - \int_0^t \tilde{M}(t - x) \mathrm{d}\tilde{G}(x), j = 0, 1,2,\cdots,m-1 \tag{48}
$$

当 $j=m$ 时，类似式(29)，得

$$
T_1 = \eta + \tilde{\chi}
$$

其中 η 与 $\tilde{\chi}$ 相互独立，η 有分布

$$
P\{\eta \leqslant t\} = 1 - e^{-(m+1)\lambda t}, \quad t \geqslant 0
$$

于是

$$\widetilde{V}_m(t) + \widetilde{W}_m(t) = [\widetilde{V}_0(t) + \widetilde{W}_0(t)] * \eta(t) \tag{49}$$

对式(48)与式(49)取 LS 变换，并结合式(46)即得式(44).

3)将式(44)代入式(43)，整理得

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_i(s) &= [\widetilde{v}_0(s) + \widetilde{w}_0(s)]\left\{\sum_{j=0}^{m} r_{ij}(s) - \frac{s}{(m+1)\lambda + s} r_{im}(s)\right\} \\ &= [\widetilde{v}_0(s) + \widetilde{w}_0(s)]\left\{\Psi_{i0}(s,1) - \frac{s}{(m+1)\lambda + s} \Psi_{im}(s,1)\right\}\end{aligned} \tag{50}$$

然后将式(44)中 $j=0$ 的结果和将式(4)中 $r=0$ 的结果代入式(50)即得式(41).

4)由于 $\widetilde{M}_i(t)$是 t 的递增函数，由 Tauber 定理(见附录中第五)，得

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\widetilde{M}_i(t)}{t} = \lim_{s \to 0^+} s\widetilde{m}_i(s) \tag{51}$$

然后使用洛必塔法则即可得式(42).

附　录

一、母函数

1．定义

设 X 是取非负整数值的离散型随机变量，其概率分布律为

$$p_k = P\{X = k\}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

则

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad |z| \leqslant 1$$

称为 X 的**概率母函数**，简称**母函数**.

显然，$\Psi(z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上一致收敛且绝对收敛，因此，母函数对任何取非负整数值的随机变量都存在.

2．性质

性质 1（惟一性）　取非负整数值的离散型随机变量，其概率分布律 $\{p_k, k \geqslant 0\}$ 与其母函数是 1—1 对应的.

性质 2　若 X 的数学期望 $E[X]$ 存在，则

$$E[X] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\Psi(z)]\Big|_{z=1}$$

性质 3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 均为取非负整数值的离散型随机变量，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则和 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的母函数等于各个母函数之积，即

$$\Psi_X(z) = \Psi_{X_1}(z) \cdot \Psi_{X_2}(z) \cdots \Psi_{X_n}(z)$$

二、拉普拉斯变换与拉普拉斯—司梯阶变换[150]

1．定义

设 $F(t)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的实值函数，若积分

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} F(t) \mathrm{d}t$$

存在，则称 $f^*(s)$ 为 $F(t)$ 的**拉普拉斯变换**（Laplace transform），简称

L 变换，并记为

$$f^*(s) = \mathrm{L}[F(t)]$$

若积分

$$f(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}F(t)$$

存在，则称 $f(s)$ 为 $F(t)$ 的**拉普拉斯—司梯阶变换**(Laplace—Stieltjes transform)，简称 LS 变换，并记为

$$f(s) = \mathrm{LS}[F(t)]$$

其中 s 为复变数.

若 $F(t)$ 为$[0,\infty)$上某一概率分布函数，则 $\mathrm{LS}[F(t)]$ 总是存在的.

2. 性质

设 $F(t)$ 和 $G(t)$ 均为定义在$[0,\infty)$上的实值函数，其 L 变换与 LS 变换均存在，a 与 b 均为常数.

性质 1

$$\mathrm{L}[aF(t)] = a\mathrm{L}[F(t)], \mathrm{LS}[aF(t)] = a\mathrm{LS}[F(t)]$$

性质 2

$$\mathrm{L}[aF(t) + bG(t)] = a\mathrm{L}[F(t)] + b\mathrm{L}[G(t)]$$

$$\mathrm{LS}[aF(t) + bG(t)] = a\mathrm{LS}[F(t)] + b\mathrm{LS}[G(t)]$$

性质 3

$$\mathrm{L}[F(t) * * G(t)] = \mathrm{L}[F(t)] \cdot \mathrm{L}[G(t)]$$

$$\mathrm{LS}[F(t) * G(t)] = \mathrm{LS}[F(t)] \cdot \mathrm{LS}[G(t)]$$

式中

$$F(t) * * G(t) = \int_0^t F(x)G(t-x)\mathrm{d}x = \int_0^t F(t-x)G(x)\mathrm{d}x$$

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(t-x)\mathrm{d}G(x) = \int_0^t G(t-x)\mathrm{d}F(x)$$

称为函数 $F(t)$ 与 $G(t)$ 的**卷积**，后者也称为**司梯阶卷积**.

三、关于拉普拉斯变换的阿贝尔(Abelian)定理[73]

如果对 $\mathscr{R}(s)>0$，$\int_0^\infty e^{-st}a(t)dt$ 是收敛的，且极限$\lim\limits_{t\to\infty}a(t)$存在，则

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=\lim_{s\to0^+}s\int_0^\infty e^{-st}a(t)dt$$

四、关于拉普拉斯—司梯阶变换的阿贝尔定理[150]

设对 $t\geqslant0$，$a(t)$在每一个有限区间上是有界变差的，如果对 $\mathscr{R}(s)>0$，$\int_0^\infty e^{-st}da(t)$ 是收敛的，且极限$\lim\limits_{t\to\infty}a(t)$存在，则

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=\lim_{s\to0^+}\int_0^\infty e^{-st}da(t)+a(0)$$

五、关于拉普拉斯—司梯阶变换的托贝尔(Tauberian)定理[150]

如果对 $t\geqslant0$，$a(t)$是单调不减的，对 $\mathscr{R}(s)>0$，$\alpha(s)=\int_0^\infty e^{-st}da(t)$ 存在，且对 $r\geqslant0$，有

$$\alpha(s)\approx\frac{A}{s^r},\quad s\to0^+$$

则

$$a(t)\approx\frac{At^r}{\Gamma(r+1)},\quad t\to\infty$$

其中 A 为常数，$\Gamma(r)$为 Γ—函数.

六、儒歇(Rouché)定理[147]

如果函数 $f(z)$和 $g(z)$在简单闭曲线 L 及 L 的内部 D 解析，且在曲线 L 上，有

$$f(z) \neq 0, \quad |f(z)| > |g(z)|$$

则在 L 的内部，$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 有相同的零点个数.

七、Smith 关键更新定理[134]

假设 $F_1(t)$ 与 $F(t)$ 分别为延迟更新过程的初始寿命与寿命分布函效，$M(t)$ 为其更新函数，并有

1) $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上为有界函数；

2) $g(t) \in L_1(0,\infty)$；

3) $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$；

4) $F(t)$ 绝对连续，且 $F(0)=0$；

5) $\Delta = \int_0^\infty t\mathrm{d}F(t) < \infty$，

则

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(t-x)\mathrm{d}M(x) = \frac{1}{\Delta}\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x$$

八、拉格朗日(Lagrange)展开定理[151]

对在区域 $|z-a| \leqslant R(R>0)$ 上解析的函数 $f(z)$ 与 $g(z)$，以及对满足不等式

$$|rg(z)| < |z-a|$$

的 r，函数 $z-a-rg(z)$ 在 $|z-a|<R$ 的内部只有惟一零点 η，而且

$$f(\eta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\{f'(x)[g(x)]^n\}|_{x=a}$$

九、Little 公式及说明

对于一个排队系统，如果在它达到统计平衡状态后，系统中任一时刻的平均队长 $\overline{N}$、平均等待队长 $\overline{N}_q$，与每一顾客在系统中的平均逗留时间 $\overline{W}$、平均等待时间 $\overline{W}_q$ 之间有关系式：

$$\overline{N} = \lambda e\overline{W}, \quad \overline{N}_q = \lambda e\overline{W}_q \tag{1}$$

成立，则称该排队系统满足 Little 公式. 其中 λe 表示单位时间内实

际进入系统的平均顾客数.

上述公式(1)是 Little 在 1961 年首先发现并给出有关假设及证明的. 之后，一些排队论专家和学者从不同的角度给出了上述公式成立的条件及其证明. 例如 Jewell 于 1967 年证明了 Little 公式在满足如下 Jewell 条件时也是成立的：

1)对系统的任何现时情形，在某个未来时期系统以概率 1 将变为空的；

2)每逢系统变为空的时候，到达与等待时间的结构是由下一个到达起而恒同地"再现"；

3)在第一个忙期里系统队长大小的期望值是有限的；

4)在每个忙期里，接受服务的顾客的人平均的平均等待时间与到达间隔时间均有限，其中一个忙期对应一个闲期.

后来，Stidham 于 1974 年给出了比 Jewell 条件更一般的条件，Heyman 与 Stidham 于 1980 年又作了进一步的推广.

而 Little 公式的直观解释是：在系统达到统计平衡条件下，考虑一个刚开始接受服务的顾客，在他后面排队等待服务的平均顾客数等于在他的平均等待时间内实际进入系统的平均顾客数，即 $\bar{N}_q=\lambda e\bar{W}_q$；又考虑一个刚服务结束的顾客，在他离开系统时留在系统中的平均顾客数等于在他的平均逗留时间内实际进入系统的平均顾客数，即 $\bar{N}=\lambda e\bar{W}$.

下面我们对 Little 公式给出一个解释性的证明，而且证明过程不依赖于到达间隔时间的分布函数，也不依赖于服务时间的分布函数与系统的排队规则.

设在$(0,t]$时间内到达且进入系统的顾客数为 $\alpha(t)$，则$(0,t]$时间内平均实际进入率为

$$\frac{\alpha(t)}{t} \tag{2}$$

又设 $\beta(t)$是 $\alpha(t)$个顾客到时刻 t 为止已花在系统中的总时间(包括等待时间及已被服务过的时间)，则每个顾客的平均逗留时间

为

$$\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \tag{3}$$

而在$(0,t]$时间内单位时间系统中顾客的平均数为

$$\frac{\beta(t)}{t} \tag{4}$$

此即为$(0,t]$时间内任一时刻系统中顾客的平均数. 于是在系统能达到统计平衡的条件下，有极限$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\beta(t)}{t}$、$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}$与$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\alpha(t)}{t}$都存在，且

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\beta(t)}{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha(t)}{t} = \lambda e\overline{W}\end{aligned}$$

同理，如果设$\tilde{\beta}(t)$为$\alpha(t)$个顾客到时刻t为止已花在系统中的总的等待时间，则每个顾客的平均等待时间为

$$\frac{\tilde{\beta}(t)}{\alpha(t)} \tag{5}$$

而在$(0,t]$时间内单位时间系统中等待服务的平均顾客数为

$$\frac{\tilde{\beta}(t)}{t} \tag{6}$$

此即为$(0,t]$时间内任一时刻系统中等待服务的平均顾客数. 于是在系统能达到统计平衡条件下，有极限$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\tilde{\beta}(t)}{t}$、$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\tilde{\beta}(t)}{\alpha(t)}$与$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\alpha(t)}{t}$都存在，且

$$\begin{aligned}\overline{N}_q &= \lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{\beta}(t)}{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{\beta}(t)}{\alpha(t)}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha(t)}{t} = \lambda e\overline{W}_q\end{aligned}$$

此即 Little 公式的证明.



十、p_j^-、p_j 与 p_j^+ 三者的关系

对于$\{p_j^-, j\geqslant 0\}$、$\{p_j, j\geqslant 0\}$与$\{p_j^+, j\geqslant 0\}$，它们分别表示顾客到达系统时看到的队长的平稳分布、系统任意时刻的队长的平稳分布，以及顾客服务完毕离开时留下的队长的平稳分布. 下面我们给出它们的关系：

1)对 $M/G/c/K(K\leqslant\infty)$排队系统，在达到统计平衡条件下，有（参考文献[66]第 77 页～第 78 页）

$$p_j^- = p_j, \quad j = 0,1,2,\cdots,K$$

而对 $M/G/1/\infty$排队系统，有

$$p_j^- = p_j = p_j^+, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

证明 根据第四章 § 2 中推论 2，我们只需证 $p_j^- = p_j$.

事实上，令 $N^-(t)$表示在时刻 t 到达的顾客看到的队长（不包括刚到达的顾客），$N(t)$表示时刻 t 的队长，则

$$p_j^- = \lim_{t\to\infty} P\{N^-(t) = j\}, p_j = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = j\}, \quad j \geqslant 0$$

在系统能达到统计平衡条件下，上述极限均存在.

又令 $A(t,t+\Delta t)$表示在$(t,t+\Delta t]$内到达一个顾客这一事件，则

$$P\{N^-(t) = j\} = \lim_{\Delta t\to 0} P\{N(t) = j|_{A(t,t+\Delta t)}\}$$

注意，事件 $A(t,t+\Delta t)$发生并不表示到达的顾客一定进入系统，它包括到达的顾客可以立刻离开而不会引起状态转移的情况. 于是，利用条件概率公式，有

$$P\{N^-(t) = j\} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P\{N(t) = j\} \cdot P\{A(t,t+\Delta t)|_{N(t)=j}\}}{P\{A(t,t+\Delta t)\}}$$

由于到达是参数 $\lambda(>0)$的 Poisson 流，因此在任何区间$(t,t+\Delta t)$内到达一个顾客的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，而与时刻 t 的状态及时刻 t 无关，即事件 $A(t,t+\Delta t)$与事件 $N(t)=j$，$(j=0,1,2,\cdots)$相互独立. 于是对任意 $t\geqslant 0$，有

$$P\{N^-(t) = j\} = P\{N(t) = j\}$$

从而 $p_j^- = p_j$，$j\geqslant 0$.

2）对 $GI/G/1/\infty$ 排队系统，在达到统计平衡条件下，有

$$p_j^- = p_j^+, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

而且参考文献[14]指出，对成批到达的 $GI^k/G/1/\infty$ 排队系统，有

$$P^-(z) = \frac{k(1-z)}{1-z^k}P^+(z), \quad |z| < 1$$

其中，$P^-(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^- z^j$，$P^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ z^j$.

证明 只证 $p_j^- = p_j^+, j=0,1,2,\cdots$

事实上，考察队长过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$的任何一个样本函数$\{N(\omega,t),t\geqslant 0\}$. 设 $A_j(t)$ 表示样本函数$\{N(\omega,t),t\geqslant 0\}$在$(0,t]$内从状态 j 向下跳到 $j+1$ 的次数（对应于顾客的到达，从而使系统的状态从 j 变到 $j+1$），$D_j(t)$ 表示样本函数$\{N(\omega,t),t\geqslant 0\}$在$(0,t]$内从状态 $j+1$ 向下跳回到状态 j 的次数（对应于顾客的离去，从而使状态从 $j+1$ 变到 j）. 由于到达与离去都是单个地发生，我们有

$$|A_j(t) - D_j(t)| \leqslant 1$$

又设 $A(t)$ 表示样本函数$\{N(\omega,t),t\geqslant 0\}$在$(0,t]$内从任意状态向上跳一步（对应于顾客的到达）的总次数，$D(t)$ 表示样本函数$\{N(\omega,t),t\geqslant 0\}$在$(0,t]$内从任意状态向下跳一步（对应于顾客的离开，状态 0 除外）的总次数. 在统计平衡下，到达的人数应等于服务的人数，即以概率 1，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{A(t)} = 1$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}A(t) = \lim_{t\to\infty}D(t) = \infty$$

于是

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{D_j(t)}{D(t)} - \frac{A_j(t)}{A(t)}\right| \leqslant \lim_{t\to\infty}\left|\frac{D_j(t) - A_j(t)}{D(t)}\right| + \lim_{t\to\infty}\left|\frac{A(t)}{D(t)} - 1\right| \cdot \frac{A_j(t)}{A(t)}$$

但

$$0 \leqslant \frac{|D_j(t) - A_j(t)|}{D(t)} \leqslant \frac{1}{D(t)} \to 0, \quad t \to \infty$$

于是

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{D_j(t)}{D(t)} - \frac{A_j(t)}{A(t)}\right| = 0$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D_j(t)}{D(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{A(t)}, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

而比值$\frac{A_j(t)}{A(t)}$是事件$\{j\to j+1\}$=｛到达顾客看见系统已有 j 个顾客｝的频率，由强大数定律，有

$$p_j^- = \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{A(t)}$$

同理，比值$\frac{D_j(t)}{D(t)}$是事件$\{j+1\to j\}$=｛离去顾客留下队长为 j｝发生的频率，有

$$p_j^+ = \lim_{t\to\infty}\frac{D_j(t)}{D(t)}$$

于是 $p_j^- = p_j^+$，$j=0,1,2,\cdots$

参考文献

[1] 吴方. 关于排队过程 $GI/E_k/1$ 的若干结果. 数学学报, 10(1960), 190～201

[2] 吴方. 关于排队过程 $GI/M/n$. 数学学报, 11(1961), 295～305.

[3] 侯振挺. 排队过程中的巴尔姆问题. 中国科学, 12(1963), 1106～1109.

[4] 徐光辉. $GI/M/n$ 系统中大量服务排队过程的等待时间分布. 数学学报, 14(1964), 796～808.

[5] 徐光辉. 排队过程 $GI/M/n$ 的瞬时性质. 数学学报, 15(1965), 91～120.

[6] 徐光辉. 排队论及其在计算机设计中的应用, 计算机应用与应用数学, 1975, No. 1, 33～43.

[7] 徐光辉. 随机服务系统 $GI/M/n$ 的 k 阶忙期. 中国科学, 1977, No. 1, 60～68.

[8] 徐光辉. 组合计算机系统中存储系统的平均响应时间. 应用数学学报, 1(1978), 137～144.

[9] 徐光辉. 随机服务系统(第二版). 北京: 科学出版社. 1988.

[10] 赵民义. 排队论中之一问题——$M/M/s$. 数学学报, 9(1959), 494～502.

[11] 韩继业. 输入依赖于队长的随机服务系统的瞬时性质和最优化. 应用数学学报, 1(1978), 59～72.

[12] 董泽清. 排队论及其应用. 西安系统工程学会出版, 1983.

[13] 董泽清、刘克. 马氏决策规划浅说. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1986.

[14] 孟玉珂. 排队论基础及应用. 上海: 同济大学出版社, 1989.

[15] 陆传赉. 排队论. 北京: 北京邮电学院出版社, 1994.

[16] 赵玮、王荫清. 随机运筹学. 北京: 高等教育出版社, 1993.

[17] 刘源张等. 运筹学在纺织工业中的应用. 北京: 科学出版社, 1960.

[18] 曹晋华、程侃. 服务台可修的 $M/G/1$ 排队系统分析. 应用数学学报, 5(1982), 113～127.

[19] 曹晋华. 服务设备可修的机器服务模型分析. 数学研究与评论, 5(1985), 89～96.

[20] 曹晋华、程侃. 可靠性数学引论. 北京: 科学出版社, 1986.

[21] 王梓坤. 随机过程. 北京: 科学出版社, 1978.

[22] 史定华. 服务台可修的 $M/G/(E_k/H)/1$ 排队系统的统计平衡理论. 运筹学杂志, 8(1989), 65～66.

[23] 史定华、李伟. 可修排队系统 $E_m/G(M/H)/1$ 的瞬态解. 运筹学杂志,9(1990),39～40.

[24] 史定华、张文国. 具有多重延误休假的可修排队 $M^X/G(M/G)/1(M/G)$ 分析. 应用数学学报,17(1994),201～214.

[25] 史定华. The Transient Solution of the Repairable Queueing System $M^X/G(M/H)/1$. 控制理论与应用,11(1994),681～688.

[26] 史定华、田乃硕. 服务台可修的 $GI/M(M/PH)/1$ 排队系统. 应用数学学报,18(1995),44～50.

[27] 田乃硕. 休假随机服务系统. 运筹学杂志,9(1990),17～30.

[28] 田乃硕. 多级适应性休假 $M/G/1$ 排队. 应用数学,4(1992),12～18.

[29] 田乃硕. PH—启动时间的 $GI/M/1$ 排队. 数学的实践与认识,1993,No. 4.

[30] 田乃硕. 单重指数休假的 $GI/M/1$ 排队系统. 系统科学与数学,13(1993),1～9.

[31] 田乃硕. Geometric/G/1 休假随机服务系统. 应用数学与计算数学学报,7(1993),71～78.

[32] 田乃硕. PH 休假的 $GI/M/1$ 排队系统. 应用数学学报,16(1993),452～461.

[33] 田乃硕. $GI/PH/1$ 休假排队系统队长的随机分解. 高校应用数学学报,8(1993),130～137.

[34] 田乃硕. N—策略 $GI/M/1$ 随机服务系统. 数学的实践与认识,1992,No. 1.

[35] 田乃硕. 休假排队综述. 运筹学杂志,13(1994),29～32.

[36] 田乃硕、李泉林. PH 分布及其在随机模型中的应用. 应用数学与计算数学学报,9(1995),1～14.

[37] 田乃硕. 相型同步启动时间的 $M/M/c$ 排队系统. 应用数学学报,20(1997),275～281.

[38] 朱翼隽. 一个数据传递装置可修的计算机系统的性能分析和最优经济策略. 全国可靠性数学第三届学术会议论文,西安,1989.

[39] 李泉林. 服务台可修的 $M/SM(PH/SM)/1$ 排队系统,应用数学,9(1996),422～428.

[40] 李泉林、唐宗贤. L^2—策略休假的可修 $M_1 \otimes M_2/G^*(M/G)/1$ 排队系统分析,系统科学与数学,16(1996),1～11.

[41] 李泉林、朱翼隽. 闸门式 PH 休假的 $PH/PH/1/N$ 排队系统，应用数学与计算数学学报，7(1993)，No. 2.

[42] 唐应辉. 两个可修服务台串联排队系统分析，西北电讯工程学院学报，14(1987)，116～123.

[43] 唐应辉. 分析 $M/G/1$ 排队系统队长分布的方法注记，系统工程理论与实践，16(1996)，No. 1，46～50.

[44] 唐应辉. 服务台可修的 $M/G/1$ 排队系统的进一步分析，系统工程理论与实践，16(1996)，No. 4，45～51.

[45] 唐应辉. 可修排队系统中可靠性指标的分解，电子学报，23(1995)，No. 4，70～73.

[46] 唐应辉、唐小我、赵伟. 推广的 $M^X/G(M/G)/1(M/G)$ 可修排队系统(Ⅰ)——一些排队指标，系统科学与数学(定稿待发).

[47] 唐应辉、唐小我. 推广的 $M^X/G(M/G)/1(M/G)$ 可修排队系统(Ⅱ)——一些可靠性指标，系统工程理论与实践，20(2000)，No. 2. 84～91

[48] 唐应辉、唐小我、赵伟. 单重休假的 $M^X/G(M/G)/1$ 可修排队系统(Ⅰ)——一些排队指标，系统工程理论与实践，20(2000)，No. 1.

[49] 夏茂辉、田乃硕. 同步 N—策略多重休假 $M/M/c$ 排队，运筹学学报，1(1997)，86～93.

[50] 袁学明、李伟. 可修排队系统 $GI/PH(M/PH)/1$ 的瞬时性态，运筹学杂志，12(1993)，53～54.

[51] 岳德权、赵玮. 具有延误休假的 $GI/M/1$ 排队系统，运筹学杂志，13(1994)，33～38.

[52] 何道杰. 串联可修服务台损失制排队系统分析，数理统计与应用概率，11(1996)，227～231.

[53] 赵晓波、周兆英. 具有阻塞影响的柔性制造系统排队网络模型，系统工程学报，14(1999)，29～34.

[54] 华兴. 排队论与随机服务系统. 上海翻译出版公司，1987.

[55] Avi－Itzhak，B. and Naor，B.，Some Queueing Problems with the Service Station Subject to Server Breakdown，Opns. Res. 10(1963)，303～320.

[56] Berg，M. and Posner，M. J. M.，Customer delay in $M/G/\infty$ Repair Systems with Spares，Opns. Res. 38(1990)，344～348.

[57] Baba，Y.，On the $M^X/G/1$ Queue with Vacation Time，Operations Research Letters，5(1986)，93～98.

[58] Burke,P.J.,Delays in Single—Server Queues With Batch Input,Opns. Res. 23(1975),830~833.

[59] Burke,P.J.,The Output of a Queueing System,Opns. Res. 4(1956),699~704.

[60] Balachandran,K.R.,Control Policies for a Single Server System,Mgmt. Sci. 19(1973),1013~1018.

[61] Balachandran, K. R. and Tijms, H., On the D—Policy for M/G/1 Queue,Mgmt. Sci. 21(1975),1073~1076.

[62] Bell,C.E.,Characterization and Computation of Optimal Policies for Operating an M/G/1 Queueing System with Removable Server,Opns. Res. 19(1971),208~218.

[63] Barlow,R.E. and Hunter,L.C.,Reliability Analysis of a One—Unit System,Opns. Res. 19(1961),200~208.

[64] Boes,D.C.,The Note on the Output of a Queueing System,J. Appl. Prob. 6(1969),459~461.

[65] Chaudhry, M. L. and Templeton, J. G. C., A First Course in Bulk Queues,Wiley,New York,1983.

[66] Cooper,R.B.,Introduction to Queueing Theory,2nd ed,Elsevier,North—Holland,New York,1981.

[67] Cinlar,E.,Introduction to Stochastic Processes,Prentice—Hall,Englewood Cliffs,1975.

[68] Chung,K.L.(钟开莱),Markov Chains with Stationary Transition Probabilities,Springer,Berlin,1960.

[69] Cohen,J.W.,The Single Server Queue,North—Holland,New York,1982.

[70] Daduna,H.,Exchangeable Items in Repair Systems: Delay Times, Opns. Res. 38(1990),349~354.

[71] Doshi, B.T.,Queueing Systems with Vacations——A Survey ,Queueing System Theory Appl. 1(1986),29~66.

[72] Doshi,B.T.,A Note on Stochastic Decomposition in a GI|G|1 Queue with Vacation or Set—Up Times, J. Appl. Prob. 22(1985),419~428.

[73] Doetsh, G., Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, Dover, New York,1943.

[74] Federgruen, A. and Green, L., Queueing Systems with Service Interruptions, Opns. Res. 34(1986), 752～768.

[75] Federgruen, A. and Green, L., Queueing Systems with Service Interruptions Ⅱ, Naval. Res. Logis. Quart. 35(1988), 345～358.

[76] Federgruen, A. and So, K.C., Optimal Time to Repair a Broken Server, Adv. Appl. Probo 21(1989), 376～397.

[77] Federgruen, A. and So, K.C., Optimal Maintenance Policies for Single－Server Queueing Systems Subject to Breakdowns, Opns. Res. 38 (1990), 330～343.

[78] Fuhrmann, S.W., A Note on the M/G/1 Queue with Server Vacation, Opns. Res. 32(1984), 1368～1373.

[79] Fuhrmann, S.W. and Cooper, R.B., Stochastic Decompositions in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations, Opns. Res. 33(1985), 1117～1129.

[80] Ferrandiz, I.M., The BMA/GI/1 Queue with Server Set－Up Times and Server Vacations, Adv. Appl. Prob. 25(1993), 235～254.

[81] Foster, F.G., On the Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Processes. Ann. Math. Statist. 24(1953), 355～360.

[82] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2nd Edition, John Wiley & Sons. New York, 1957.

[83] Gross, D. and Harris, C.M., Fundamentals of Queueing Theory, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[84] Grassmann, W.K., Transient Solutions in Markovian Queueing Systems, Comput. Opns. Res. 4(1977a), 47～53.

[85] Heyman, D.P., The T－Policy for the M/G/1 Queue, Mgmt. Sci. 23 (1977), 775～778.

[86] Heyman, D.P. and Stidham, S. Jr., The Relation Between Customer and Time Averages in Queues, Opns. Res. 28(1980), 983～994.

[87] Harris, C.M. and Marchal, W.G., State Dependence in M/G/1 Server Vacation Model, Opns. Res. 36(1988), 560～565.

[88] Hubbard, J.R. and Pegden, C.D. and Rosenshine, M., The Departure Process For the M/M/1 Queue, J. Appl. Prob. 23(1986), 249～255.

[89] Hsu, G.H.(徐光煇)and He, Q.M.(何启明)and Liu, X.S.(刘西锁),

The Matched Queueing System with A Double Input, Acta Math. Appl. Sinica, 13(1990),39~48.

[90] Igaki,N., Exponential Two Server Queue with N—Policy and General Vacations, Queueing Systems,10(1992),279~294.

[91] Jewell, W.S., A Simple Proof of L=λW, Opns. Res. 15(1967),1109~1116.

[92] Keilson, J. and Servi, L., Oscillating Random Walk Models for GI/G/1 Vacation Systems with Bernoulli Schedules, J. Appl. Prob. 23(1986),790~802.

[93] Keilson, J. and Servi, L., Dynamics of the M/G/1 Vacation Model, Opns. Res. 35(1987),575~582.

[94] Keilson, J. and Ramaswamy, The Backlog and Depletion Time Process for M/G/1 Vacation Models with Exhaustive Service Discipline, J. Appl. Prob. 25(1988),404~412.

[95] Kella, O., The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations, Naval. Res. Logistics,36(1989),111~123.

[96] Kella, O. and Yechiali, U., Priorities in M/G/1 Queue with Server Vacations, Naval. Res. Logis. 35(1988),23~34.

[97] Karlin, S. and Taylor, H. M. A., A First Course in Stochastic Processes, 2nd Edition, Academic Press, New York,1975.

[98] Karlin, S. and McGregor, J., The Classification of Birth and Death Processes, Tran. Amer. Math. Soc. 86(1957),366~400.

[99] Lee, T.T., M/G/1/N Queue with Vacation Time and Exhaustive Service Discipline, Opns. Res. 32(1984),774~784.

[100] Levy, Y. and Yechiali, Y., Utilization of Idle Time in an M/G/1 Queueing System, Mgmt. Sci. 22(1975),202~211.

[101] Levy, Y. and Yechiali, U., An M/M/s Queue with Server's Vacations, INFOR 14(1976),153~163.

[102] Levy, H. and Kleinrock, L., A Queue with Starter and A Queue with Vacations: Delay Analysis by Decomposition, Opns. Res. 34(1986),426~436.

[103] Lee, H. S. and Srinivasan, M. M., Control Policies for the $M^x/G/1$ Queueing System, Mgmt. Sci. 35(1989),708~721.

[104] Lucantoni, D. M. and Meier－Hellstern, K. S. and Neuts, M. F., A Single Server Queue with Server Vacations and a Class of Non－renewal Arrival Processes, Adv. Appl. Prob. 22(1989), 676～705.

[105] Lee, H. W. and Lee, S. S. and Park, J. O. and Chae, K. C., Analysis of the $M^x/G/1$ Queue with N－Policy and Multiple Vacations, J. Appl. Prob. 31(1994), 476～496.

[106] Leung, K. K., On the Additional Delay in An M/G/1 Queue with Generalized Vacations and Exhaustive Service, Opns. Res. 40(1992), 5272～5283.

[107] Little, J. D. C., A Proof of the Queueing Formula $L=\lambda W$, Opns. Res. 9(1961), 383～389.

[108] Minh, D., Transient Solutions For Some Exhaustive M/G/1 Queue with Generalized independent Vacations, Eur. J. Opns. Res. 36(1988), 197～201.

[109] Neuts, M. F. and Lucantoni, D. M., A Markovian Queue with N Servers Subject to Breakdowns and Repairs, Mgmt. Sci. 25(1979), 849～861.

[110] Neuts, M. F., Matrix－Geometric Solutions in Stochastic Models, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[111] Ott, T. J., The M/G/1 Queue with Additional Input, J. Appl. Prob. 21(1984), 129～142.

[112] Ott, T. J., The Single Server Queue with Independent GI/G and M/G Input Streams, Adv. Appl. Prob. 19(1987), 266～286.

[113] Prabhu, N. U., Queues and Inventories, John Wiley, New York, 1985.

[114] Ramaswami, V., The N/G/1 Queue and Its Detailed Analysis, Adv. Appl. Prob. 12(1980), 222～261.

[115] Ramalhoto, M. F., Bounds For the Variance of the Busy Period of the $M/G/\infty$ Queue, Adv. Appl. Prob. 16(1984), 929～932.

[116] Ross, S. M., Stochastic Processes, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[117] Reuter, G. E. H., Denumerable Markov Processes and the Assaciated Contraction Semigroups on 1, Acta Math. 97(1957), 1～46.

[118] Sengupta, B., A Queue with Service Interruptions In an Alternating Random Environment, Opns. Res. 38(1990), 308～318.

[119] Sengupta, B., Markov Processes Whose Steady State Distribution is Matrix – exponential with an Application to the GI/PH/1 Queue, Adv. Appl. Prob. 21(1989), 159~180.

[120] Servi, L., D/G/1 Queue with Vacations, Opns. Res. 34(1986), 619~629.

[121] Scholl, M. and Kleinrock, L., On the M/G/1 Queue with Rest Period and Certain Service—Independent Queueing Disciplines, Opns. Res. 31(1983), 705~719.

[122] Shanthikumar, J. G., On Stochastic Decomposition in M/G/1 Type Queue with Generalized Server Vacation, Opns. Res. 36(1988), 566~569.

[123] Stidham, S, Jr., A Last Word on L=λW, Opns. Res. 22(1974), 417~421.

[124] Smith, W. L., Regenerative Stochastic Processes, Proc. Roy. Soc., London, A232, 6~31, 1955.

[125] Thiruvengdan, K., Queueing with Breakdowns. Opns. Res. 11(1963), 62~71.

[126] Tak'acs, L., Introduction to the Theory of Queues, Oxford University Press, New York, 1962.

[127] Tian, N. (田乃硕) and Zhang, D. (张大庆) and Cao, C.. (曹成弦), The GI/M/1 Queue With Exponential Vacations, Queueing Systems Theory Appl. 4(1989), 331~344.

[128] Tian, N. S. (田乃硕) and Zhang, D. Q. (张大庆) and Cao, C. X. (曹成弦), M/G/1 Queue With Controllable Vacations and Optimization of Vacation Policy, Acta Math. Appl. 7(1991), 364~373.

[129] Tian, N. S. (田乃硕) and Li, Q. L. (李泉林) and Cao, J. H. (曹晋华), Conditional Stochastic Decompositions in the M/M/C Queue with Server Vacations, Stochastic Models, 1999, No. 2.

[130] Takagi, H., Priority Queue with Set – Up Times, Opns. Res. 38(1990), 667~677.

[131] Takagi, H., Queueing Analysis — Vacations and Priority System, Vol. 1, North – Holland, Amsterdam, 1991.

[132] Teghem, J., Control of the Service Processes in Queueing Systems,

Eur. J. Opns. Res. 23(1986), 141～153.

[133] Teghem, J., Vacation Policies in An M/G/1 Type Queueing System with Finite Capacity, QUESTA, 3(1988), 41～52.

[134] Tang, Y. H. (唐应辉), The Transient Solution For M/G/1 Queue with Server Vacations, Acta Math. Scientia, 17(1997), 276～282.

[135] Tang, Y. H. (唐应辉), The Departure Process of M/G/1 Queueing Model with Server Vacation and Exhaustive Service Discipline, J. Appl. Prob. 31(1994), 1070～1082.

[136] Tang, Y. H. (唐应辉), Some Reliability Problems Arising in GI/G/1 Queueing System with Repairable Service Station, Microelectron. & Reliab. 35(1995), 707～712.

[137] Tang, Y. H. (唐应辉), Downtime of the Service Station in M/G/1 Queueing System with Repairable Service Station, Microelectron. & Reliab. 36(1996), 199～202.

[138] Tang, Y. H. (唐应辉), A Single Server M/G/1 Queueing System Subject to Breakdowns —— Some Reliability and Queueing Problems, Microelectron. & Reliab. 37(1997), 315～321.

[139] Tang, Y. H. (唐应辉), A New and Direct Method of Analysis the Departure Processes of Single Server Queueing System, Acta Math. Scientia, Suppl. (1996), 131～138.

[140] Tang, Y. H. (唐应辉), Some New Results For M/G/1 and GI/G/1 Queues, J. of Sys. Sci. & Sys. Engi., 5(1996), 337～344.

[141] Tang, Y. H. (唐应辉), and Tang, X. W. (唐小我), An M/G/1 Queueing System with Delay Server Vacations, J. of Sys. Sci. & Sys. Engi., 7(1998), 29～36.

[142] Tang, Y. H. (唐应辉) and Tang, X. W (唐小我), Some Reliability Problems Arising in M/G/1 Queueing System with Repairable Service Station and Server Vacations, Chinese J. of Electronics, 8(1999), 385～390.

[143] Tang, Y. H. (唐应辉) and Tang, X. W. (唐小我), An Concise Proof of the Relation Between Poisson Process and Exponential Distribution, J. of Sys. Sci. & Sys. Engi., 8(1999), No. 4.

[144] Tang, Y. H. (唐应辉) and Tang, X. W. (唐小我), The Queue Length

Distribution For M/G/1 Queue with Delay Single Server Vacation, J. of Sys. Sci. & Sys. Engi. ,9(2000).

[145] Tang, Y. H. (唐应辉)and Tang, X. W. (唐小我), The Queue Length Distribution For M^x/G/1/Queue with Single Server Vacation, Acta Math. Scientia, 20(2000), No. 3.

[146] Tang, Y. H. (唐应辉)and Tang, X. W. (唐小我), Some New Results on Waiting Time and Busy Time in M/G/1 Queue, Acta Math. Scientia (定稿待发).

[147] Titchmarsh, E. C. , Theory of Functions, Oxford University Press, London, 1952.

[148] Vinod, B. , Exponential Queue with Server Vacations, J. Oper. Res. Soc. 37(1986), 1007～1014.

[149] Viscolani, B. , An Adaptive Multistage Queueing System, J. Appl. Prob. 33(1986), 495～503.

[150] Widder, D. V. , The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[151] Whittaker, E. T. and Watson, G, N. , A Course of Modern Analysis, Cambrige University Press, London, 1946.

[152] Zhu, Y. J. (朱翼隽)and Li, Q. L. (李泉林), Analysis of a Two－Stage Cyclic Queue with State－dependent Vacation Policy, Optimization, 36 (1996), 75～91.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝排队论：基础与应用
作者＝
页数＝３４４
ＳＳ号＝１１１１０７１０
出版日期＝